INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIX. BAND · ERSTES HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 14. März 1960

Postverlagsort Berlin

Preis DM 12,—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 27901

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 830301

Inhalt:

Seite

Lehmann, Th., Einige Betrachtungen zu den Grundlagen der Umformtechnik . . . 1

Woinowsky-Krieger, S., Über die Biegung einer unendlich erstreckten orthotropen Platte auf elastischer Unterlage 22

Pohl, K. H., Strömungsverhältnisse in einem Diffusor mit vorgeschaltetem Krümmer. Mit 16 Abbildungen 31

Eggers, K., Über die Erfassung der Widerstandserhöhung im Seegang durch Energiebetrachtungen. Mit 8 Abbildungen 39

Lianis, G., The plastic yielding of double notched bars due to pure bending. Mit 24 Abbildungen 55

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND ERSTES HEFT 1960

Einige Betrachtungen zu den Grundlagen der Umformtechnik*

Von Th. Lehmann

1. Einleitung. Die Umformtechnik umfaßt alle Fertigungsverfahren[1], bei denen durch bleibende Formänderungen im festen Aggregatzustand aus einer Ausgangsform eine neue Form, die Endform, entsteht. Der Ablauf des Umformvorganges ist durch die zeitliche Folge der Augenblicksformen gekennzeichnet. Umfaßt ein Umformvorgang mehrere Stufen, so erhält man Zwischenformen als Ergebnisse der einzelnen Umformstufen.

Die Umformung ist ein irreversibler Vorgang, und zwar nicht nur im thermodynamischen Sinne; denn jede Umformung hinterläßt im Werkstück Veränderungen, die praktisch nicht mehr oder zumindest nicht mehr vollständig rückgängig zu machen sind. Hier sollen aber nur solche Erscheinungen betrachtet werden, die phänomenologisch im Sinne der Physik der Kontinua erfaßbar sind. Einzelheiten der Vorgänge innerhalb der Kristallite, also Gefügeänderungen, Veränderungen im Kristallgitter usw. oder, anders gesagt, alle Vorgänge, die in unmittelbarem Zusammenhang mit der atomaren, molekularen bzw. kristallinen Struktur des Stoffes stehen, scheiden aus dem Kreis der Betrachtungen aus.

Phänomenologisch gesehen handelt es sich bei Umformvorgängen um „Zustandsänderungen" des Werkstoffes. Zustandsänderungen, d. h. Änderungen einer „Zustandsfunktion" (abhängige Variable), ergeben sich aus Änderungen der „Zustandsgrößen" (unabhängige Variable). Zustandsfunktion und Zustandsgrößen sind durch „Zustandsgleichungen" miteinander verknüpft. Die Definition von Zustandsgrößen ist an die Forderung gebunden, daß die Zustandsfunktionen eindeutig von den Zustandsgrößen abhängen müssen, was in der sogenannten Integrabilitätsbedingung der Zustandsfunktionen zum Ausdruck kommt[2, 3]. Deshalb können die Variablen eines Vorgangs nicht in beliebiger Weise als Zustandsgrößen eingeführt werden. Eine weitere Forderung ist, daß Zustandsgrößen stets unabhängig vom Koordinatensystem, d. h. invariante Größen sein müssen.

Die Frage nach der Definition von Zustandsgrößen bei Umformvorgängen ist bisher nicht allgemeingültig geklärt; sie ist wohl auch noch nicht in so allgemeiner Form gestellt worden, wenn man auch den Zusammenhängen mit der Thermodynamik schon einige Betrachtungen gewidmet hat[4, 5]. Es wäre sicher nützlich, dieser Frage nachzugehen; denn in engem Zusammenhang damit stehen praktisch wichtige Fragen, wie z. B. die Frage nach der ertragbaren Beanspruchung, die ja nur eine Funktion der Zustandsgrößen sein kann. In dieser Arbeit kann dieser ganze Fragenkreis jedoch nur kurz gestreift werden.

Bei der Betrachtung bleibender Formänderungen hat man es in der Regel nicht mehr mit kleinbleibenden Formänderungen zu tun. Außerdem hat man im allgemeinen damit zu rechnen, daß sich die Werkstoffeigenschaften mit der Formänderung verändern. Diesen Gegebenheiten wird man am besten dadurch gerecht, daß man zur Beschreibung der Vorgänge ein körperfestes Koordinatensystem verwendet. Ausnahmen bilden gewisse stationäre oder quasistationäre Vorgänge, die sich

---

* Die nachstehenden Ausführungen sind der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Habilitationsschrift des Verfassers (Berichter: Professor Dr.-Ing. *E. Pestel* und Professor Dr.-Ing. *O. Kienzle*) entnommen. Mit Rücksicht auf die darin ebenfalls enthaltenen Betrachtungen zur Erfassung und Ordnung technischer Umformvorgänge erhielt die gesamte Arbeit den vorstehenden Titel.

[1] Fertigungsverfahren sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Ergebnisse stets feste Körper mit definierten Formen sind; Zubereitungsverfahren beziehen sich dagegen stets auf „formlose" Körper, d. h. auf solche ohne definierte Formen, wie z. B. Gase, Flüssigkeiten, Pulver, Granulate, formlos erstarrte Flüssigkeiten usw.

[2] *R. Becker*, Theorie der Wärme, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.

[3] *H. Hausen*, Brennstoff–Wärme–Kraft 2 (1950) S. 1, 43, 77.

[4] *A. M. Freudenthal*, Inelastisches Verhalten von Werkstoffen, Berlin 1955.

[5] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 58.

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND ERSTES HEFT 1960

Einige Betrachtungen zu den Grundlagen der Umformtechnik*

Von Th. Lehmann

1. Einleitung. Die Umformtechnik umfaßt alle Fertigungsverfahren[1], bei denen durch bleibende Formänderungen im festen Aggregatzustand aus einer Ausgangsform eine neue Form, die Endform, entsteht. Der Ablauf des Umformvorganges ist durch die zeitliche Folge der Augenblicksformen gekennzeichnet. Umfaßt ein Umformvorgang mehrere Stufen, so erhält man Zwischenformen als Ergebnisse der einzelnen Umformstufen.

Die Umformung ist ein irreversibler Vorgang, und zwar nicht nur im thermodynamischen Sinne; denn jede Umformung hinterläßt im Werkstück Veränderungen, die praktisch nicht mehr oder zumindest nicht mehr vollständig rückgängig zu machen sind. Hier sollen aber nur solche Erscheinungen betrachtet werden, die phänomenologisch im Sinne der Physik der Kontinua erfaßbar sind. Einzelheiten der Vorgänge innerhalb der Kristallite, also Gefügeänderungen, Veränderungen im Kristallgitter usw. oder, anders gesagt, alle Vorgänge, die in unmittelbarem Zusammenhang mit der atomaren, molekularen bzw. kristallinen Struktur des Stoffes stehen, scheiden aus dem Kreis der Betrachtungen aus.

Phänomenologisch gesehen handelt es sich bei Umformvorgängen um „Zustandsänderungen" des Werkstoffes. Zustandsänderungen, d. h. Änderungen einer „Zustandsfunktion" (abhängige Variable), ergeben sich aus Änderungen der „Zustandsgrößen" (unabhängige Variable). Zustandsfunktion und Zustandsgrößen sind durch „Zustandsgleichungen" miteinander verknüpft. Die Definition von Zustandsgrößen ist an die Forderung gebunden, daß die Zustandsfunktionen eindeutig von den Zustandsgrößen abhängen müssen, was in der sogenannten Integrabilitätsbedingung der Zustandsfunktionen zum Ausdruck kommt[2, 3]. Deshalb können die Variablen eines Vorgangs nicht in beliebiger Weise als Zustandsgrößen eingeführt werden. Eine weitere Forderung ist, daß Zustandsgrößen stets unabhängig vom Koordinatensystem, d. h. invariante Größen sein müssen.

Die Frage nach der Definition von Zustandsgrößen bei Umformvorgängen ist bisher nicht allgemeingültig geklärt; sie ist wohl auch noch nicht in so allgemeiner Form gestellt worden, wenn man auch den Zusammenhängen mit der Thermodynamik schon einige Betrachtungen gewidmet hat[4, 5]. Es wäre sicher nützlich, dieser Frage nachzugehen; denn in engem Zusammenhang damit stehen praktisch wichtige Fragen, wie z. B. die Frage nach der ertragbaren Beanspruchung, die ja nur eine Funktion der Zustandsgrößen sein kann. In dieser Arbeit kann dieser ganze Fragenkreis jedoch nur kurz gestreift werden.

Bei der Betrachtung bleibender Formänderungen hat man es in der Regel nicht mehr mit kleinbleibenden Formänderungen zu tun. Außerdem hat man im allgemeinen damit zu rechnen, daß sich die Werkstoffeigenschaften mit der Formänderung verändern. Diesen Gegebenheiten wird man am besten dadurch gerecht, daß man zur Beschreibung der Vorgänge ein körperfestes Koordinatensystem verwendet. Ausnahmen bilden gewisse stationäre oder quasistationäre Vorgänge, die sich

---

* Die nachstehenden Ausführungen sind der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Habilitationsschrift des Verfassers (Berichter: Professor Dr.-Ing. *E. Pestel* und Professor Dr.-Ing. *O. Kienzle*) entnommen. Mit Rücksicht auf die darin ebenfalls enthaltenen Betrachtungen zur Erfassung und Ordnung technischer Umformvorgänge erhielt die gesamte Arbeit den vorstehenden Titel.

[1] Fertigungsverfahren sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Ergebnisse stets feste Körper mit definierten Formen sind; Zubereitungsverfahren beziehen sich dagegen stets auf „formlose" Körper, d. h. auf solche ohne definierte Formen, wie z. B. Gase, Flüssigkeiten, Pulver, Granulate, formlos erstarrte Flüssigkeiten usw.

[2] *R. Becker*, Theorie der Wärme, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.

[3] *H. Hausen*, Brennstoff–Wärme–Kraft 2 (1950) S. 1, 43, 77.

[4] *A. M. Freudenthal*, Inelastisches Verhalten von Werkstoffen, Berlin 1955.

[5] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 58.

auch in ortsfesten Koordinatensystemen und mit Methoden verfolgen lassen, wie sie in der Strömungstechnik und in der klassischen Plastizitätstheorie [1,2,3,4,5,6,7,8] üblich sind.

Bei den folgenden Untersuchungen wird die analytische Tensorschreibweise nach DIN 1303[9] verwendet[10], unter Einschluß der *Einstein*schen Summationskonvention. Im übrigen lehnt sich die Art der Darstellung an *A. E. Green* und *W. Zerna*[12] an und baut wie diese auf dem Ricci-Kalkül auf.

2. Koordinatensystem und Maßtensor. Das körperfeste Koordinatensystem sei mit x^i bezeichnet. Von ihm wird neben gewissen Stetigkeitsforderungen zur Sicherung hinreichender Differentiierbarkeit nur vorausgesetzt, daß jedes Koordinatentripel einen Punkt des Körpers umkehrbar eindeutig festlegt. Im übrigen ist das Koordinatensystem beliebig. Es macht alle Formänderungen des Körpers mit, so daß jeder Körperpunkt seine Koordinaten bei allen Formänderungen und Bewegungen beibehält. Bildet man das körperfeste Koordinatensystem in einem ortsfesten, cartesischen Koordinatensystem (y^i) ab, so hat man im allgemeinen einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Koordinaten, der auch noch von der Zeit t abhängt:

$$y^i = y^i\,(x^k, t)\,, \qquad x^i = x^i\,(y^k, t)\,. \tag{1}$$

Die Koordinatendifferentiale transformieren sich dagegen linear:

$$dy^i = c^i_k\,dx^k\,, \qquad dx^i = \bar{c}^i_k\,dy^k\,. \tag{2}$$

Die Transformationsmatrizen

$$c^i_k = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,, \qquad \bar{c}^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \tag{3}$$

sind im allgemeinen Funktionen des Ortes und der Zeit.

Die Metrik des körperfesten Koordinatensystems ist durch den symmetrischen Maßtensor festgelegt[13]:

$$g_{ik} = c^m_i\,c^m_k\,, \qquad g^{ik} = \bar{c}^i_m\,\bar{c}^k_m\,. \tag{4}$$

Größen, die sich auf den unverformten Zustand des Körpers beziehen, werden durch eine übergesetzte $\circ$ gekennzeichnet, z. B. $\mathring{g}_{ik}$ oder $\mathring{c}^i_k$.

3. Formänderungstensor. a) Definition des Formänderungstensors. Aus der Beziehung

$$g_{ik} = \mathring{g}_{im}\,\mathring{g}^{mr}\,g_{rk} \tag{5}$$

ersieht man, daß die Multiplikation mit dem Tensor

$$q^m_k = \mathring{g}^{mr}\,g_{rk} \tag{6}$$

den kovarianten Maßtensor des unverformten Koordinatensystems in den des verformten Koordinatensystems überführt. Dieser Tensor[14] ist also kennzeichnend für den Formänderungszustand.

Aus verschiedenen Gründen ist es aber zweckmäßiger, den gemischtvarianten logarithmischen Formänderungstensor

$$\varepsilon^i_k = \frac{1}{2}\ln\,(q^i_k) = \frac{1}{2}\ln\,(\mathring{g}^{ir}\,g_{rk}) \tag{7}$$

---

[1] *H. Tresca*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris 59 (1864) S. 754; Ann. du conservatoire des arts et métiers 1865; Comptes rendus Acad. Sci. Paris 64 (1867) S. 809; Mém. prés. div. Savants 18 (1868) S. 733; Mèm. près. div. Savants 20 (1872) S. 75 u. 281.

[2] *M. Lévy*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris 70 (1870) S. 1323.

[3] *R. v. Mises*, Nachr. Wiss. Ges Göttingen 1913, S. 582; Z. angew. Math. Mech. 8 (1928) S. 161

[4] *L. Prandtl*, Nachr. d. Wiss. Ges. Göttingen 1920, S. 74; Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 401.

[5] *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 241.

[6] *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950.

[7] *W. Prager* und *P. G. Hodge*, Theorie idealplastischer Körper, Wien 1954.

[8] *V. V. Sokolovskij*, Theorie der Plastizität, Berlin 1955.

[9] DIN 1303, Schreibweise von Tensoren, Entw. 8. 57.

[10] Diese Schreibweise stimmt im wesentlichen mit der von *A. Duschek* und *A. Hochrainer*[11] überein.

[11] *A. Duschek* und *A. Hochrainer*, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, 3 Teile, Wien 1950/55.

[12] *A. E. Green* und *W. Zerna*, Theoretical Elasticity, Oxford 1954.

[13] *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektorrechnung, 5. Aufl., Leipzig 1956.

[14] Sein Zusammenhang mit dem Abbildungstensor und dem Dehnungstensor ist im Anhang 1 dargestellt.

einzuführen[1]. Schon *H. Richter*[3] wies auf die mit dieser Definition verbundenen Vorteile hin:

1) Der logarithmische Formänderungstensor ist sinnvoll aufzuspalten in

$$\varepsilon_k^i = \gamma_k^i + \beta_k^i , \tag{8}$$

wobei der Formänderungsdeviator (Verzerrungstensor)

$$\gamma_k^i = \varepsilon_k^i - \frac{1}{3}\,\delta_k^i\,\varepsilon_r^r \tag{9}$$

die Gestaltänderungen und der Kugeltensor

$$\beta_k^i = \frac{1}{3}\,\delta_k^i\,\varepsilon_r^r \tag{10}$$

die Volumenänderungen verkörpert.

2) Es gilt auch für endliche Formänderungen ein lineares additives Superpositionsgesetz. Deshalb können z. B. die Gestaltänderungen in ihren elastischen und plastischen Anteil aufgespalten werden:

$$\gamma_k^i = \overset{el}{\gamma}{}_k^i + \overset{pl}{\gamma}{}_k^i . \tag{11}$$

3) Der gemischt-variant definierte Formänderungstensor ist affin-invariant.

H. Richter definiert den logarithmischen Formänderungstensor (7) ein wenig umständlicher im ortsfesten Koordinatensystem. Die hier angegebene Definition geht in ihren Grundgedanken wohl auf *H. Hencky*[4] zurück. Bei plastischen Formänderungen ist aber sonst anscheinend noch kein Gebrauch von dieser Definition gemacht worden, obwohl der Begriff „logarithmische Formänderung" in der Umformtechnik seit langem heimisch ist[5]. Er entspricht dem auf Hauptachsen transformierten logarithmischen Formänderungstensor. Entwickelt man übrigens den logarithmischen Formänderungstensor (7) in eine Reihe, so entspricht das erste Glied der in der modernen Elastizitätstheorie sonst üblichen Definition des Formänderungstensors*. Der Zusammenhang des log. Formänderungstensors mit dem Verschiebungsvektor ist im Anhang 2 dargestellt. Es ergeben sich nichtlineare Beziehungen.

b) Invarianten des logm. Formänderungstensors. Für die hier durchzuführenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Aufspaltung des logm. Formänderungstensors in Kugeltensor (Volumenänderungsanteil) und Deviator (Verzerrungstensor) beizubehalten. Für die Volumenänderung ist nur die erste Invariante des Kugeltensors

$$\left.\begin{aligned} B &= \beta_r^r = \varepsilon_r^r , \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{g}{\overset{\circ}{g}} = \ln\frac{V}{\overset{\circ}{V}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

von Bedeutung. Hierbei ist g bzw. $\overset{\circ}{g}$ die Determinante des kovarianten Maßtensors (*Gram*sche Determinante) im verformten bzw. unverformten Zustand, die ein Maß für das Volumen V eines Körperelementes ist.

Beim Verzerrungstensor verschwindet die erste Invariante identisch

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \gamma_r^r \equiv 0 . \tag{13}$$

Die beiden anderen unabhängigen Invarianten werden hier in Anlehnung an *Richter* wie folgt definiert:

$$\Phi_{\mathrm{II}} = \gamma_k^i\,\gamma_i^k \tag{14}$$

und

$$\Phi_{\mathrm{III}} = \gamma_k^i\,\gamma_l^k\,\gamma_i^l . \tag{15}$$

Φ_{II} kennzeichnet die Größe der Gestaltänderung. Der Quotient

$$\frac{B^2}{\Phi_{\mathrm{II}}} = \chi \tag{16}$$

---

[1] $\ln\left(q_k^i\right)$ ist als Matrizenfunktion aufzufassen (vgl. *Zurmühl*[2]) und nicht als der Logarithmus der Maßzahlen des Tensors.

[2] *R. Zurmühl*, Matrizen, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

[3] *H. Richter*, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949) S. 65.

[4] *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 144, ferner *C. Truesdell*, Journ. Rat. Mech. and Analysis 1 (1952) S. 125, 2 (1953) S. 593.

[5] *E. Siebel*, Die Formgebung im bildsamen Zustand, Düsseldorf 1932.

* Siehe Fußnote 12 von Seite 2.

ist also ein Maß für das Verhältnis von Volumenänderung zur Gestaltänderung. Der Quotient

$$\frac{\Phi_{\mathrm{III}}^3}{\Phi_{\mathrm{II}}^3} = \xi \tag{17}$$

kennzeichnet dagegen die Art der Gestaltänderung. Die charakteristische Gleichung des Verzerrungstensors

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\,\Phi_{\mathrm{II}}\,\lambda - \frac{1}{3}\,\Phi_{\mathrm{III}} = 0 \tag{18}$$

hat nämlich nur reelle Lösungen für $0 \leqq \xi \leqq 1/6$. Dabei gehört $\xi = 0$ zu einer reinen Gleitung, $\xi = 1/6$ zu einer einachsigen Verzerrung*.

c) Geometrische Randbedingungen und Verträglichkeitsbedingungen. Bei den geometrischen Randbedingungen werden im allgemeinen nicht die Formänderungen, sondern die Verschiebungen bzw. deren Richtungen gegeben sein:

$$v^i = a^i(x^k, t)\,, \qquad n_i(x^k, t)\,v^i = 0\,. \tag{19}$$

Die Maßzahlen des Verschiebungsvektors kann man auf das unverformte körperfeste Koordinatensystem beziehen ($\tilde{v}^i$) oder auch auf das verformte (v^i). Was man vorzuziehen hat, hängt vom Einzelfall ab.

Beim Übergang von den Verschiebungen auf die Formänderungen, hat man zu beachten, daß sich in der Regel die Randbedingungen für die Formänderungen nicht ohne Willkür in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten lassen, zumal die Beziehungen zwischen Verschiebungen und Formänderungen nichtlinear sind. Probleme mit geometrischen Randbedingungen verlangen darum exakterweise nach einer gemeinsamen Behandlung der elastischen und plastischen Formänderungen.

Ähnliche Überlegungen gelten für die Verträglichkeitsbedingungen, die sich aus der Forderung herleiten lassen, daß der *Riemann*sche Krümmungstensor für das körperfeste Koordinatensystem sowohl im unverformten wie im verformten Zustand verschwinden muß, da der Raum euklidisch ist und bleibt**. Die Verträglichkeitsbedingungen betreffen den gesamten Formänderungstensor. Der elastische und der plastische Anteil werden für sich allein in der Regel die Verträglichkeitsbedingungen nicht erfüllen. Hierin liegt die Ursache der Eigenspannungen nach bleibenden Formänderungen. Da die Beziehungen zwischen Krümmungstensor und Formänderungstensor wiederum nichtlinear sind, ergeben sich auch hierbei schwer übersehbare Verhältnisse.

d) Einige kritische Bemerkungen zur Definition des Formänderungstensors. Die Stetigkeitsforderungen an das Koordinatensystem zur Sicherung hinreichender Differentiierbarkeit bedeuten physikalisch, daß alle im unverformten Körper auf einer stetigen Linie liegenden Punkte auch nach der Formänderung eine stetige Linie bilden müssen. Dem widerspricht die Erfahrung, daß alle bleibenden Formänderungen auf Versetzungen in den Gleitebenen der Kristalle beruhen. Um diesen Widerspruch zu beseitigen, sind Kontinuumstheorien der Versetzungen und Eigenspannungen entwickelt worden, die von *E. Kröner*[1] ausführlich behandelt werden. Diese Theorien liefern einen verhältnismäßig einfachen Zusammenhang zwischen der Inkompatibilität der auf Versetzungen beruhenden plastischen Formänderungen und den elastischen Restspannungen nach äußerer Entlastung. Dafür sagen sie kaum etwas über den Formänderungsvorgang aus. Außerdem sind sie meist auf kleine Formänderungen zugeschnitten. Zur Behandlung von Problemen der Umformtechnik sind diese Theorien daher im allgemeinen nicht geeignet. Immerhin sollte man sich bewußt bleiben, daß bei der hier vorgeschlagenen Beschreibung bleibender Formänderungen, die mit der Inkompatibilität der plastischen bzw. elastischen Formänderungen, sowie mit den geometrischen Randbedingungen zusammenhängenden Fragen noch nicht befriedigend geklärt sind.

4. Spannungstensor. a) Definition des Spannungstensors. Die Spannungen müssen bei großen Formänderungen stets auf den verformten Körper bezogen werden. Ordnet man jeder Begrenzungsfläche eines aus dem verformten Körper herqusgeschnittenen Elementes in bekannter Weise einen Vektor dF_i so zu, daß sein Betrag der Flächengröße entspricht und seine Richtung mit der nach außen weisenden Flächennormalen n_i zusammenfällt, so kann man für die auf das Flächenelement wirkende Kraft schreiben

$$dP_k = \sigma_k^i\,dF_i\,. \tag{20}$$

* Siehe Fußnote 3 von S. 3.
** Siehe Fußnote 12 von Seite 2.
[1] *E. Kröner*, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

Dabei ist σ_k^i der auf das verformte Koordinatensystem bezogene Spannungstensor. Er ist symtrisch, wenn am Körperelement keine Momente angreifen.

Der Spannungstensor ist aufzuspalten in

$$\sigma_k^i = \tau_k^i + \varkappa_k^i , \tag{21}$$

wobei

$$\tau_k^i = \sigma_k^i - \frac{1}{3}\,\delta_k^i\,\sigma_r^r \tag{22}$$

der Spannungsdeviator und

$$\varkappa_k^i = \frac{1}{3}\,\delta_k^i\,\sigma_r^r \tag{23}$$

der dem hydrostatischen Druck entsprechende Kugeltensor ist.

b) Invarianten des Spannungstensors. Die Invarianten werden in gleicher Weise wie beim Formänderungstensor gebildet. Man erhält also für den Kugeltensor die Invariante

$$K = \sigma_r^r = \varkappa_r^r , \tag{24}$$

die gleich dem dreifachen negativen hydrostatischen Druck ist:

$$p = -\frac{1}{3}\,K . \tag{25}$$

Die Invarianten des Spannungsdeviators sind

$$\Psi_{\mathrm{I}} \equiv 0 , \tag{26}$$

$$\Psi_{\mathrm{II}} = \tau_k^i\,\tau_i^k , \tag{27}$$

$$\Psi_{\mathrm{III}} = \tau_k^i\,\tau_l^k\,\tau_i^l . \tag{28}$$

Ψ_{II} kennzeichnet die Höhe des Deviator-Spannungs-Zustandes. Das Verhältnis

$$\frac{K^2}{\Psi_{\mathrm{II}}} = \zeta \tag{29}$$

drückt aus, wie hoch die hydrostatische Beanspruchung gegenüber dem Deviatorspannungs-Zustand ist. Der Quotient

$$\frac{\Psi_{\mathrm{III}}^2}{\Psi_{\mathrm{II}}^3} = \vartheta \qquad \left(0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{6}\right) \tag{30}$$

gibt dagegen die Art des Spannungszustandes an, wobei $\vartheta = 0$ zu einer reinen Schubbeanspruchung und $\vartheta = 1/6$ zu einem einachsigen Spannungszustand gehört.

c) Gleichgewichts- und Randbedingungen. Für die am Massenelement angreifenden Kräfte gilt, wenn k_i der Vektor der auf die Masseneinheit bezogenen Kräfte ist und b_i den Beschleunigungsvektor darstellt, die bekannte Gleichgewichtsbedingung[1]

$$\underline{\sigma_i^k}_{\,k} + \varrho\,(k_i - b_i) = 0 . \tag{31}$$

Hier ist ϱ die Dichte des verformten Werkstoffes. Sie läßt sich durch die Dichte im unverformten Körper und durch die Determinante des kovarianten Maßtensors bzw. durch die erste Invariante des logm. Formänderungstensors ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \mathring{\varrho}\,\frac{\mathring{V}}{V} , \\ &= \mathring{\varrho}\,\sqrt{\frac{\mathring{g}}{g}} = \mathring{\varrho}\,e^{-B} . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Deshalb kann man für (31) auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\frac{\sigma_k^i}{\varrho}}_{\,|i} - \frac{\sigma_k^i}{\varrho}\,\varrho\,\underline{\frac{1}{\varrho}}_{\,|i} + k_k - b_k = 0 , \\ \text{bzw.} \quad &\underline{\overset{\times}{\sigma}{}_k^i}_{\,|i} - \overset{\times}{\sigma}{}_k^i\,\underline{B}_{\,|i} + k_k - b_k = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

[1] $\underline{\sigma_i^k}_{\,|k}$ bezeichnet die kovariante Ableitung nach x^k; vgl. Anhang 2. Die Ableitung von (31) ist in Anhang 3 dargestellt.

wobei

$$\overset{\times}{\sigma}{}_k^i = \frac{\sigma_k^i}{\varrho} = \frac{\sigma_k^i}{\mathring{\varrho}}\, e^B \tag{34}$$

die auf die Dichte bezogene Spannung ist.

Führt man in die Gleichgewichtsbedingung den hydrostatischen Druck und den Spannungsdeviator ein und bezieht auch diese auf die Dichte, indem man

$$\overset{\times}{p} = \frac{p}{\varrho}\,, \qquad \overset{\times}{\tau}{}_k^i = \frac{\tau_k^i}{\varrho} \tag{35}$$

setzt, so erhält man

$$\underline{\overset{\times}{\tau}{}_k^i}\,|_i - \overset{\times}{\tau}{}_k^i\, \underline{B}\,|_i - \underline{\overset{\times}{p}}\,|_k + \overset{\times}{p}\, \underline{B}\,|_k + k_k - b_k = 0\,. \tag{36}$$

Die Einführung der bezogenen Spannungen $\overset{\times}{\sigma}{}_k^i$ usw. ist zweckmäßig, weil hier alle Größen auf die Masseneinheit bezogen werden. Das liegt nahe, weil die Masse bei allen Formänderungen konstant bleibt, das Volumen dagegen nicht. Die auf die Dichte bezogenen Spannungen haben übrigens die Dimension einer Energie je Masseneinheit. Das erhellt manche interessanten physikalischen Zusammenhänge.

Es ist angebracht, auch die Invarianten des Spannungstensors mit den auf die Dichte bezogenen Spannungen zu bilden, also z. B.

$$\overset{\times}{\Psi}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\varrho^2}\, \Psi_{\mathrm{II}} \tag{37}$$

einzuführen. In gleicher Weise verfährt man zweckmäßig auch mit anderen aus dem Spannungstensor abzuleitenden Größen.

Die Randbedingungen lassen sich in der Form

$$n_i\, \sigma_k^i = s_k(x^l, t)\,, \qquad \varepsilon^{ikl}\, n_r\, \sigma_i^r\, n_k = 0 \tag{38}$$

angeben, wobei n_i der Normal-Vektor der Oberfläche und ε^{ikl} der sogenannte ε-Tensor ist.

5. Allgemeine Betrachtungen von Zustandsänderungen. a) Energiegleichungen. Nach dem allgemeinen Energiesatz gilt für abgeschlossene Systeme

$$\delta W = \delta L + \delta Q\,. \tag{39}$$

Hierin ist[1]

δW die Energieänderung des Systems,
δL die mechanisch zugeführte Energie,
δQ die als Wärme zugeführte Energie.

Die Energieänderung des Systems läßt sich aufgliedern in eine Änderung der kinetischen Energie δE und eine Änderung der inneren Energie δU:

$$\delta W = \delta E + \delta U\,. \tag{40}$$

Andererseits setzt sich nach den Grundgesetzen der Mechanik die zugeführte mechanische Arbeit δL teils in kinetische Energie δE, teils in Formänderungsarbeit δA um:

$$\delta L = \delta E + \delta A\,. \tag{41}$$

Führt man (40) und (41) in (39) ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \delta E + \delta U &= \delta E + \delta A + \delta Q\,, \\ \text{also} \qquad \delta U &= \delta A + \delta Q \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

oder, wenn man bei gleichmäßiger Energiedichte die Energieänderungen auf die Masseneinheit bezieht,

$$\delta u = \delta a + \delta q\,. \tag{43}$$

Der Zuwachs an Formänderungsarbeit, bezogen auf die Masseneinheit, ist[2]

$$\left.\begin{aligned} \delta a &= \overset{\times}{\sigma}{}_k^i\, \delta \varepsilon_i^k\,, \\ &= -\overset{\times}{p}\, \delta B + \overset{\times}{\tau}{}_k^i\, \delta \gamma_i^k\,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

[1] Die differentiellen Änderungen sind hier mit δ gekennzeichnet, um anzudeuten, daß es sich nicht notndig um Differentiale von Zustandsgrößen handelt.

[2] Ableitung in Anhang 4.

Bei ungleichmäßiger Energieverteilung im Körper muß man von Gleichung (43) wieder auf (42) zurückgehen. Man hat dann also beispielsweise zu bilden

$$\delta A = \int_V \delta a \, \varrho \, dV \,. \tag{45}$$

Die innere Energie u ist eine Zustandsfunktion des abgeschlossenen Systems. Ihre Änderung kann daher mit du bezeichnet werden (vgl. hierzu *R. Becker**). Aus der allgemein gültigen Energiegleichung (43) ist aber nur eine Zustandsgleichung abzuleiten, wenn es gelingt, die rechte Seite dieser Gleichung durch Zustandsgrößen auszudrücken, von denen u eindeutig abhängt, so daß Zustandsänderungen unabhängig vom Wege sind. Das soll im folgenden kurz untersucht werden, wobei die Betrachtungen der Einfachheit halber auf die Masseneinheit bezogen werden.

b) Reversible Zustandsänderungen. Bei reversiblen Zustandsänderungen ist

$$\delta q = T \, ds \,. \tag{46}$$

T ist die absolute Temperatur und s die auf die Masseneinheit bezogene Entropie. Beide sind als Zustandsgrößen bekannt. Damit wird aus (43)

$$du = \overset{\times}{\sigma}{}^i_k \, \delta \varepsilon^k_i + T \, ds \,. \tag{47}$$

Beschränkt man sich nun auf adiabatische Zustandsänderungen ($ds = 0$) oder auf isotherme ($T =$ konst), so kann man allgemeiner für (47) schreiben[1]

$$d\varphi = \overset{\times}{\sigma}{}^i_k \, \delta \varepsilon^k_i \,, \tag{48}$$

wobei

$$d\varphi = \begin{cases} du & \text{(adiabatische Zustandsänderung),} \\ d(u - Ts) & \text{(isotherme Zustandsänderung)} \end{cases}$$

ein totales Differential einer Zustandsfunktion ist. Setzt man nun voraus, daß φ eindeutig vom logm. Formänderungstensor ε^i_k abhänge, ε^i_k also eine Zustandsgröße sei, so folgt aus

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^i_k} \, d\varepsilon^i_k \tag{49}$$

die Integrabilitätsbedingung

$$\overset{\times}{\sigma}{}^k_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^i_k} \tag{50}$$

oder bei Trennung von Volumenänderungs- und Gestaltänderungsarbeit

$$-\overset{\times}{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial B} \,, \qquad \overset{\times}{\tau}{}^k_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma^i_k} \,. \tag{51}$$

Die durch die Dichte ϱ dividierten Spannungen leiten sich also im Raum der Formänderungen bei adiabatischen und isothermen Zustandsänderungen[1] — sofern die Formänderungen als Zustandsgrößen anzusehen sind — von einem Potential φ (elastisches Potential) ab und sind deshalb eindeutige Funktionen der Formänderungen. Im einfachsten Falle ist bei isotropem Werkstoff das elastische Potential

$$\varphi = \frac{G}{\overset{\circ}{\varrho}} \left(\frac{1}{3} \, \frac{m+1}{m-2} \, B^2 + \Phi_{II} \right). \tag{52}$$

Hierin ist G der Schubmodul und m die *Poisson*sche Querzahl. B und Φ_{II} sind die Invarianten des logm. Formänderungstensors. Der Zusammenhang zwischen logm. Formänderungen und Spannungen ist nach (52) und (51)

$$\left.\begin{aligned} -\overset{\times}{p} &= \frac{2\,G}{3\,\overset{\circ}{\varrho}} \, \frac{m+1}{m-2} \, B \,, \\ \text{also} \qquad -p &= \frac{2\,G}{3} \, \frac{m+1}{m-2} \, \frac{\overset{\circ}{V}}{V} \ln \frac{V}{\overset{\circ}{V}} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \overset{\times}{\tau}{}^i_k &= \frac{2\,G}{\overset{\circ}{\varrho}} \, \gamma^i_k \,, \\ \text{also} \qquad \tau^i_k &= 2\,G \, \frac{\overset{\circ}{V}}{V} \, \gamma^i_k \,. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

* Siehe Fußnote 2 von Seite 1.

[1] Dasselbe gilt noch allgemeiner für alle Zustandsänderungen, bei denen die Wärmezufuhr eindeutig von den Formänderungen abhängt.

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man die durch die Dichte dividierten Spannungen als Zustandsgrößen einführt. Dann ist

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{\sigma}{}^i_k}\, d\overset{\times}{\sigma}{}^i_k\,, \tag{55}$$

$$B = -\frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{p}}\,, \tag{56}$$

$$\gamma^i_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{\sigma}{}^k_i}\,. \tag{57}$$

Aus

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\overset{\circ}{\varrho}}{4G}\left(3\frac{m-2}{m+1}\,\overset{\times}{p}{}^2 + \overset{\times}{\tau}{}^i_k\,\overset{\times}{\tau}{}^k_i\right), \\ &= \frac{\overset{\circ}{\varrho}}{4G}\left(3\frac{m-2}{m+1}\,\overset{\times}{p}{}^2 + \overset{\times}{\psi}_{II}\right) \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

folgen wieder die Beziehungen (53) bzw. (54).

Bei kleinbleibenden Formänderungen gehen diese Beziehungen in die *Hooke*schen Gesetze über. Die Erweiterung auf anisotrope Werkstoffe und allgemeinere Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten*.

Aus der Tatsache, daß das elastische Potential φ eine skalare Funktion ist und sich diese Funktion sowohl durch den Spannungstensor wie auch durch den Formänderungstensor ausdrücken läßt, folgt die Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial B}\,dB + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma^i_k}\,d\gamma^i_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{p}}\,d\overset{\times}{p} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{\tau}{}^i_k}\,d\overset{\times}{\tau}{}^i_k\,. \tag{59}$$

Diese Bedingung ist für beliebige Zustandsänderungen dann immer erfüllt, wenn

$$d\overset{\times}{p} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial B}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{p}}}\,dB \qquad \text{und} \qquad d\overset{\times}{\tau}{}^i_k = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma^i_k}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overset{\times}{\tau}{}^i_k}}\,d\gamma^i_k \tag{60}$$

ist. Dies ergibt sich, wenn man einmal die Spannungsänderungen als unabhängige Variable betrachtet und dabei die Formänderungsinkremente als abhängige Variable ansieht, das andere Mal aber umgekehrt verfährt.

Aus diesen Beziehungen lassen sich die Extremal-Prinzipien der Elastizitätstheorie in allgemeinster Form ableiten. So ist z. B. für isotrope Werkstoffe daraus zu folgern, daß stets — also auch bei nichtlinearen Formänderungsgesetzen —

$$d\overset{\times}{\tau}{}^i_k \sim d\gamma^i_k \tag{61}$$

ist. Dies kann man auch so ausdrücken: Zustandsänderungen verlaufen so, daß die aktive Formänderungsarbeit zu einem Maximum wird.

c) Irreversible Zustandsänderungen. Bei allgemeinen Zustandsänderungen, die auch irreversible Vorgänge enthalten, kann δq nicht mehr durch $T \cdot ds$ ersetzt werden, da hierbei

$$T\,ds > \delta q \tag{62}$$

ist. Beschränkt man sich aber wiederum auf adiabatische Zustandsänderungen ($\delta q = 0$) oder solche, bei denen die Wärmezufuhr eindeutig von der Formänderungsarbeit anhängt (z. B. isotherme), so behält Gleichung (48) (mit df statt $d\varphi$), also

$$df = \overset{\times}{\sigma}{}^i_k\,\delta\varepsilon^k_i \tag{48}$$

ihre Gültigkeit. Die Bedeutung des totalen Differentiales df ändert sich allerdings im allgemeinen; nur bei adiabatischen Zustandsänderungen ist wie vorher $df = du$. Der logm. Formänderungstensor bzw. der Spannungstensor kann aber jetzt nicht mehr für sich allein als Zustandsgröße eingeführt werden, da dann sofort wieder ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen d. h. vollständige Umkehrbarkeit der Vorgänge zu folgern wäre.

Was man statt dessen als Zustandsgrößen einzuführen hat, und wie diese Zustandsgrößen von Spannungen und Formänderungen abhängen, soll hier nicht weiter verfolgt werden. Es genügt

* Siehe Fußnote 12 von Seite 2.

hier die Feststellung, daß man bei allgemeinen Zustandsänderungen, die irreversible Vorgänge enthalten, Spannungen und Formänderungen als unabhängige Variable anzusehen hat. Das bedeutet nicht, daß Spannungstensor und logm. Formänderungstensor sich völlig unabhängig voneinander ändern können. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Tensoren wird aber nur eindeutig, wenn man gleichzeitig den Weg angibt, auf dem man die Spannungen oder die Formänderungen ändert, wobei in manchen Fällen auch der zeitliche Verlauf anzugeben ist.

Gleichung (48) behält also nach diesen Ausführungen für irreversible Zustandsänderungen nur den Charakter einer Energiegleichung. Diese kann man noch ein wenig umgestalten, indem man die Energieänderungen in ihren umkehrbaren Anteil $d\varphi$ (Änderung der potentiellen Energie) und in ihren nicht umkehrbaren Anteil $\delta\psi$ (Dissipation) aufspaltet:

$$\left.\begin{aligned} df &= d\varphi + \delta\psi\,, \\ &= -\overset{\times}{p}\, dB + \overset{\times i}{\tau}_k\, \delta\gamma_i^k\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Wie sich die Gestaltänderungsarbeit auf potentielle Energie und auf Dissipation aufteilt, hängt von der Art der Formänderung ab. Die Volumenänderungsarbeit kann man dagegen in der Regel als vollständig umkehrbar ansehen. Die potentielle Energie hängt eindeutig von den elastischen Formänderungen bzw. von den Spannungen ab. Sie ist also eine Zustandsfunktion der mechanischen Zustandsgrößen (Spannungen bzw. Formänderungen).

Die dissipierte Energie ist dagegen keine eindeutige Funktion der Spannungs- bzw. Formänderungen, sondern nur ihrer Differentiale. Sie ist im wesentlichen als Wärmeenergie wiederzufinden, teilweise tritt sie aber auch als latente Energie (z. B. in der Kaltverfestigung) auf. Für die Dissipation gilt nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\delta\psi \geqq 0\,. \tag{64}$$

Wo der zeitliche Verlauf eine Rolle spielt, geht man von

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} = -\overset{\times}{p}\, \dot{B} + \overset{\times i}{\tau}_k\, \dot{\gamma}_i^k \tag{65}$$

aus, mit der Bedingung

$$\dot{\psi} \geqq 0\,. \tag{66}$$

6. Formänderungsgesetze bei inelastischen Formänderungen. a) Zähe Formänderungen. Zähe Formänderungen sind vom zeitlichen Ablauf, d. h. von der Formänderungsgeschwindigkeit abhängig. Die auf *Newton* zurückgehende Beziehung

$$\overset{\times i}{\tau}_k = 2\,\frac{\eta}{\varrho}\,\dot{\gamma}_k^i \tag{67}$$

findet in der statistischen Thermodynamik durch die *Onsager*-Relationen* ihre Begründung Verallgemeinerungen ergeben sich aus dem Ansatz**

$$\overset{\times i}{\tau}_k = \frac{\partial N}{\partial \dot{\gamma}_i^k}\,, \tag{68}$$

wobei N eine Funktion der logm. Gestaltänderungsgeschwindigkeit ist.

Mit dem Ansatz (67) ergibt sich für die Dissipationsleistung eines *Newton*-Körpers, bezogen auf die Masseneinheit,

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= 2\,\frac{\eta}{\varrho}\,\dot{\gamma}_k^i\,\dot{\gamma}_i^k\,, \\ &= 2\,\mathring{\nu}\,\dot{\gamma}_k^i\,\dot{\gamma}_i^k\,. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Allgemeiner ist

$$\dot{\psi} = \frac{\partial N}{\partial \dot{\gamma}_k^i}\,\dot{\gamma}_k^i\,. \tag{70}$$

Sind mit den zähen Formänderungen elastische verbunden, so ergeben sich verschiedene Möglichkeiten des Zusammenwirkens. Die einfachsten Modellverstellungen findet man beim *Kelvin*-Körper und beim *Maxwell*-Körper, deren Gesetzmäßigkeiten in der Übersicht 1 angegeben sind***. Natürlich lassen sich auch verwickeltere Arten des Zusammenwirkens darstellen.

---

* Siehe Fußnoten 2 und 5 von Seite 1.
** Siehe Fußnote 5 von Seite 1.
*** Siehe Fußnote 4 von Seite 1.

b) Idealplastische Formänderungen. Man spricht von ideal-plastischen Formänderungen, wenn ein Körper sich plastisch deformiert d. h. in einen Fließzustand gerät, sobald die Spannungen einen bestimmten Zustand (Fließbedingung) erreichen, und wenn die Fließbedingung nur die Spannungen betrifft und zeitlich unveränderlich ist. Der Fließzustand dauert an, solange die Spannungen die Fließbedingung erfüllen.

Ist die Fließbedingung

$$F(\overset{\times i}{\tau_k}) = 0\,, \tag{71}$$

so muß

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \overset{\times i}{\tau_k}}\, d\overset{\times i}{\tau_k} = 0 \tag{72}$$

sein, wenn der Körper im Fließzustand bleiben soll. Nimmt man hierzu die — im Gegensatz zur Elastizitätstheorie stehende — Extremalbedingung, daß bei infinitesimalen Gestaltänderungen der Zuwachs der Formänderungsarbeit (aktiver plus passiver Anteil) zu einem Maximum werden solle, d. h. daß bei gegebenen $d\gamma_i^k$ die Variation

$$\delta\overset{\times i}{\tau_k}\, d\gamma_i^k = 0 \tag{73}$$

sein soll, so folgt aus (72) und (73) das Formänderungsgesetz

$$d\gamma_k^i = d\lambda\, \frac{\partial F}{\partial \overset{\times k}{\tau_i}} \tag{74}$$

bzw.

$$\dot{\gamma}_k^i = \dot{\lambda}\, \frac{\partial F}{\partial \overset{\times k}{\tau_i}}\,. \tag{75}$$

Hierbei ist $d\lambda$ bzw. $\dot{\lambda}$ ein beliebiger, im allgemeinen örtlich und zeitlich veränderlicher, positiver Proportionalitätsfaktor.

Der Ansatz (71) ist nicht auf isotropes Werkstoffverhalten beschränkt. Er ist ferner erweiterungsfähig, indem man mehrere Fließbedingungen ansetzt[1]:

$${}_rF(\overset{\times i}{\tau_k}) = 0 \qquad (r = 1 \ldots n)\,. \tag{76}$$

Von diesen Fließbedingungen braucht immer nur eine erfüllt zu sein; es können aber auch mehrere sein. Sind dies die Bedingungen ${}_sF$, so gilt

$$\dot{\gamma}_k^i = {}_s\dot{\lambda}\, \frac{\partial {}_sF}{\partial \overset{\times k}{\tau_i}} \qquad \begin{matrix}(s = 1 \ldots m)\\ (1 \leqq m \leqq n)\,.\end{matrix} \tag{77}$$

Die hier entwickelten Beziehungen werden sonst meist mit Hilfe des Begriffes vom plastischen Potential abgeleitet. Der so definierte ideal-plastische Körper läßt sich als Grenzfall eines nichtlinearen *Newton*-Körpers deuten*. Damit verlieren die sonst zur Begründung der Theorie vom plastischen Potential erforderlichen Voraussetzungen ein wenig von ihrer Willkür. Am häufigsten werden die *v. Mises*sche Fließbedingung, die dem Ansatz (71) entspricht, und die *Tresca*sche Fließbedingung, die zu den verallgemeinerten Fließbedingungen (76) gehört, verwendet. Hinsichtlich der letzteren, die in allgemeiner Form umständlich anzugeben ist, sei auf *Prager* verwiesen. Die *v. Mises*sche Fließbedingung ist

$$F(\overset{\times i}{\tau_k}) = \overset{\times i}{\tau_k}\, \overset{\times k}{\tau_i} - \overset{\times}{k}{}^2 = 0\,. \tag{78}$$

Zu ihr gehört das Formänderungsgesetz

$$\dot{\gamma}_k^i = \dot{\lambda}\, \overset{\times i}{\tau_k}\,. \tag{79}$$

Die Dissipationsleistung ist

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi} &= \dot{\lambda}\, \overset{\times i}{\tau_k}\, \overset{\times k}{\tau_i}\,,\\ &= \dot{\lambda}\, \overset{\times}{k}{}^2\,.\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Die Überlagerung mit elastischen Formänderungen führt zu den *Prandtl-Reuß*schen Gleichungen (s. Tabelle 1).

---

[1] *W. Prager*, Probleme der Plastizitätstheorie, Basel-Stuttgart 1955; Proc. Inst. Mech. Eng. London 169 (1955) S. 41.

* Siehe Fußnote 5 von Seite 1.

Ein Hinweis sei hier noch angebracht: Die zeitlich und örtlich unveränderliche Fließbedingung (71) verlangt

$$\underline{F}_{,r} = \frac{\partial F}{\partial \overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k}} \underline{\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k}}_{,r} = 0 \,. \tag{81}$$

Diese Gleichung ergibt eine Bedingung, der die örtlichen Ableitungen des Spannungsdeviators zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen (37) genügen müssen. Der Spannungstensor wäre damit überbestimmt, wenn sich seine Maßzahlen mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen eindeutig auf drei reduzieren ließen. Dies ist aber wegen des unbestimmten Faktors im Formänderungsgesetz (75) bzw. (77) nicht der Fall, und deshalb scheinen Fließbedingungen und Gleichgewichtsbedingungen miteinander verträglich zu sein. Diese Frage ist bisher aber noch nicht genau untersucht worden, obwohl eine Klärung wünschenswert erscheinen muß; denn bekanntlich führen schon bei einfachen Problemen die obigen Ansätze manchmal zu Unstetigkeiten in der Spannungsverteilung.

c) Plastische Formänderungen mit Kaltverfestigung. Berücksichtigt man bei plastischen Formänderungen die Kaltverfestigung, so wird die Fließbedingung abhängig von der vorausgegangenen Formänderung. Man hat deshalb die Fließbedingung als Funktion des Spannungs- und des logm. Formänderungstensors anzusehen (vgl. Abschnitt 5 c)):

$$F\left(\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k}, \gamma^{i}_{k}\right) = 0 \,. \tag{82}$$

Die Erhaltung des Fließzustandes erfordert

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k}} d\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k} + \frac{\partial F}{\partial \gamma^{i}_{k}} d\gamma^{i}_{k} = 0 \,. \tag{83}$$

Stützt man sich auf die gleichen Extremalprinzipien, wie sie für den elastischen Bereich gelten (vgl. Abschnitt 5 b)), so zerfällt Gleichung (83) in

$$d\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k} = - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \gamma^{i}_{k}}}{\dfrac{\partial F}{\partial \overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k}}} d\gamma^{i}_{k} \,. \tag{84}$$

Damit hat man das zur Fließbedingung (82) gehörende Formänderungsgesetz gefunden. Bemerkenswert ist, daß Gleichung (83) in Verbindung mit Gleichung (84) den Spannungsänderungen keine zusätzliche Bedingung auferlegt. Das muß auch gefordert werden; denn bei plastischen Formänderungen mit Kaltverfestigung sind die Beziehungen zwischen Spannungsänderungen und Formänderungen eindeutig im Gegensatz zu den Beziehungen bei ideal-plastischen Formänderungen.

Für isotrope Kaltverfestigung kann man z. B., wie in der Theorie vom plastischen Potential üblich, von der Annahme ausgehen, daß die Invariante $\overset{\times}{\Psi}_{II}$ des Spannungsdeviators eine Funktion der Gestaltänderungsarbeit sei

$$\overset{\times}{\Psi}_{II} - \overset{\times}{k}{}^{2}(a) = 0 \,. \tag{85}$$

Dieser Ansatz führt zu dem Formänderungsgesetz

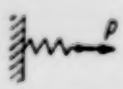
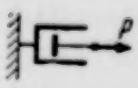
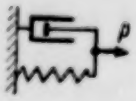
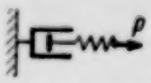
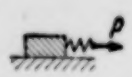
$$d\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k} = \frac{1}{2} \frac{d\overset{\times}{k}{}^{2}}{da} d\gamma^{i}_{k} \qquad \text{bzw.} \qquad d\gamma^{i}_{k} = \frac{2}{\dfrac{d\overset{\times}{k}{}^{2}}{da}} d\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k} \,. \tag{86}$$

Das Inkrement des logm. Formänderungsdeviators ist danach dem Inkrement des Spannungsdeviators proportional. Eine Erweiterung des Ansatzes (85), die auch anisotrope Verfestigung (*Bauschinger*-Effekt) berücksichtigt, erhält man z. B. mit

$$\left(\overset{\times}{\tau}{}^{i}_{k} - \mu\, \gamma^{i}_{k}\right)\left(\overset{\times}{\tau}{}^{k}_{i} - \mu\, \gamma^{k}_{i}\right) - \overset{\times}{k}{}^{2} = 0 \,, \tag{87}$$

wobei μ und $\overset{\times}{k}{}^{2}$ im allgemeinen Falle noch Funktionen des Spannungs- und des Formänderungstensors sein können. Dieser Ansatz, der bereits viele Anpassungsmöglichkeiten an das reale Werk-

Tabelle 1. *Verhalten*

Name		1	2	3	4	5	6
		Hooke	*Newton*	*Kelvin*	*Maxwell*	*v. Mises*	*Prandtl-Reuß*
Formänderung		elastisch	zäh	elastisch + zäh (Nachwirkung)	elastisch + zäh (kriechen)	idealplastisch	elastisch + idealplastisch
einachsiges mechanisches Modell							
Fließbedingung		———	———	———	———	$\overset{\times}{\tau}{}^i_k \, \overset{\times}{\tau}{}^k_l - \overset{\times}{k}{}^2 = 0$	wie 5
Formänderungsgesetze	Volumenänderg.	$\overset{\times}{p} = -\frac{2G}{3\mathring{\varrho}} \frac{m+1}{m-2} B$	———	wie 1	wie 1	———	wie 1
	Gestaltänderg.	$\overset{\times}{\tau}{}^i_k = \frac{2G}{\mathring{\varrho}} \gamma^i_k$	$\overset{\times}{\tau}{}^i_k = \frac{2\eta}{\mathring{\varrho}} \gamma^i_k$	$\overset{\times}{\tau}{}^i_k = \frac{2G}{\mathring{\varrho}} \gamma^i_k + \frac{2\eta}{\mathring{\varrho}} \dot{\gamma}^i_k$	$\dot{\gamma}^i_k = \frac{\mathring{\varrho}}{2G} \overset{\circ}{\tau}{}^i_k + \frac{\mathring{\varrho}}{2\eta} \overset{\times}{\tau}{}^i_k$	$\dot{\gamma}^i_k = \dot{\lambda} \overset{\times}{\tau}{}^i_k$	$\dot{\gamma}^i_k = \frac{\mathring{\varrho}}{2G} \overset{\circ}{\tau}{}^i_k + \dot{\lambda} \overset{\times}{\tau}{}^i_k$
Potentielle Energie φ	Volumenänderg.	a) $\frac{G}{3\mathring{\varrho}} \frac{m+1}{m-2} B^2$ b) $\frac{3\mathring{\varrho}}{4G} \frac{m-2}{m+1} \overset{\times}{p}{}^2$	———	wie 1	wie 1	———	wie 1
	Gestaltänderg.	a) $\frac{G}{\mathring{\varrho}} \gamma^i_k \gamma^k_i$ b) $\frac{\mathring{\varrho}}{4G} \overset{\times}{\tau}{}^i_k \overset{\times}{\tau}{}^k_i$	———	wie 1 a	wie 1 b	———	wie 1 b
Dissipationsleistung $\dot{\psi}$		———	a) $\frac{2\eta}{\mathring{\varrho}} \dot{\gamma}^i_k \dot{\gamma}^k_i$ b) $\frac{\mathring{\varrho}}{2\eta} \overset{\times}{\tau}{}^i_k \overset{\times}{\tau}{}^k_i$	wie 2 a	wie 2 b	$\dot{\lambda} \overset{\times}{\tau}{}^i_k \overset{\times}{\tau}{}^k_i = \dot{\lambda} \overset{\times}{k}{}^2$ $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(x^i)$	wie 5

Die Unterlage des Körpers ist in der Weise nachgiebig zu denken, daß er mit zunehmendem Weg (ohne Rücksicht auf die Richtung) tiefer einsinkt.

stoffverhalten bietet, ist vom Verfasser bereits an anderer Stelle[1] behandelt. Das zugehörige Formänderungsgesetz ist

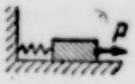
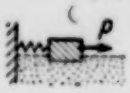
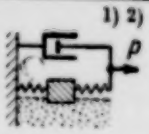
$$d\overset{\times}{\tau}{}^i_k = \frac{2\mu\left(\overset{\times}{\tau}{}^k_i - \mu\gamma^k_i\right) + 2\frac{\partial\mu}{\partial\gamma^i_k}\gamma^r_s\left(\overset{\times}{\tau}{}^s_r - \mu\gamma^s_r\right) + \frac{\partial k^2}{\partial\gamma^i_k}}{2\left(\overset{\times}{\tau}{}^k_i - \mu\gamma^k_i\right) - 2\frac{\partial\mu}{\partial\overset{\times}{\tau}{}^i_k}\gamma^m_n\left(\overset{\times}{\tau}{}^n_m - \mu\gamma^n_m\right) - \frac{\partial k^2}{\partial\overset{\times}{\tau}{}^i_k}} d\gamma^i_k . \tag{88}$$

Der Kreis der Möglichkeiten ist damit jedoch keineswegs erschöpft. Auch eine Überlagerung elastischer Eigenschaften in der üblichen Weise bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten (s. Tabelle 1). Desgleichen lassen sich zähe Formänderungen überlagern.

d) Kritische Stellungnahme zu den Gesetzen plastischer Formänderungen. Die hier vertretene Auffassung, daß bei plastischen Formänderungen mit Kaltverfestigung Spannungstensor und logm. Formänderungstensor (nicht ihre Differentiale) als unabhängige Variable anzu-

[1] *Th. Lehmann*, Z. angew. Math. Mech. 38 (1958) S. 295.

einfacher Modellkörper

7	8	9	10	11
plastisch mit isotroper Kaltverfestigung	plastisch mit anisotroper Kaltverfestigung	plastisch (allgemein)	elastisch + plastisch (allgemein)	elastisch + plastisch (allgemein) + zäh
1)	2) 	1) 2) 	1) 2)	1) 2) 
$\overset{\times}{\tau}{}_k^i \overset{\times}{\tau}{}_i^k - \overset{\times}{k}{}^2(a) = 0$	$\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i - \mu\,\gamma_k^i\right) \times \left(\overset{\times}{\tau}{}_i^k - \mu\,\gamma_i^k\right) - \overset{\times}{k}{}^2 = 0$	$F\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i;\gamma_k^i\right) = 0$	wie 9	$F\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i - \frac{2\,\eta}{\overset{\circ}{\varrho}}\,\dot{\gamma}_k^i;\gamma_k^i\right) = 0$
———	———	———	wie 1	wie 1
$\dot{\gamma}_k^i = \frac{2}{\frac{d\overset{\times}{k}{}^2}{da}}\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i = \lambda(a)\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i$	$\dot{\gamma}_k^i = \frac{1}{\mu}\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i = \lambda\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i$	$\dot{\gamma}_k^i = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \overset{\times}{\tau}{}_k^i}}{\frac{\partial F}{\partial \gamma_k^i}}\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i = +\lambda\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i;\gamma_k^i\right)\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i$	$\dot{\gamma}_k = \left(\frac{\overset{\circ}{\varrho}}{2\,G} + \lambda\right)\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i$ $\lambda = \lambda\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i;\gamma_k^i\right)$	$\dot{\gamma}_k^i = \left(\frac{\overset{\circ}{\varrho}}{2\,G} + \lambda\right) \times \left(\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_k^i - \frac{2\,\eta}{\overset{\circ}{\varrho}}\,\dot{\gamma}_k^i\right)$ $\lambda = \lambda\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i - \frac{2\,\eta}{\overset{\circ}{\varrho}}\,\dot{\gamma}_k^i;\gamma_k^i\right)$
———	———	———	wie 1	wie 1
———	———	———	wie 1 b	$\frac{\overset{\circ}{\varrho}}{4\,G}\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i - \frac{2\,\eta}{\overset{\circ}{\varrho}}\,\dot{\gamma}_k\right) \times \left(\overset{\times}{\tau}{}_i^k - \frac{2\,\eta}{\overset{\circ}{\varrho}}\,\dot{\gamma}_i^k\right)$
$\lambda\,\overset{\times}{\tau}{}_k^i\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_i^k$ $\lambda = \lambda(a)$	$\lambda\,\overset{\times}{\tau}{}_k^i\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_i^k$ $\lambda = \text{konst.}$	$\lambda\,\overset{\times}{\tau}{}_k^i\,\dot{\overset{\times}{\tau}}{}_i^k$ $\lambda = \lambda\left(\overset{\times}{\tau}{}_k^i;\gamma_k^i\right)$	wie 9	$\overset{\times}{\tau}{}_k^i\,\dot{\gamma}_i^k - \dot{\varphi}$

[1] Die in der nachgeschalteten Feder gespeicherte Energie ist nicht mehr als potentielle Energie anzusprechen, sondern richtiger als latente Energie, die nur bei Belastungsumkehr wieder frei wird.

sehen sind, steht im Gegensatz zu den bisher üblichen theoretischen Ansätzen*. Diese gehen von der Fließbedingung für ideal-plastische Formänderung aus, also z. B. von der Gleichung (79); man betrachtet lediglich die invariante Größe $\overset{\times}{k}{}^2$ als abhängig von der Formänderungsgeschichte. Der Begriff vom plastischen Potential wird beibehalten und

$$d\gamma_k^i = h\,\frac{\partial F}{\partial \overset{\times}{\tau}{}_i^k}\,d\overset{\times}{k}{}^2 \tag{89}$$

gesetzt, wobei F und h Funktionen sind, die nur vom Spannungstensor abhängen, während $\overset{\times}{k}{}^2$ eine Funktion der Gestaltänderungsarbeit a ist. Die Bedingung für die Erhaltung des Fließzustandes führt dann schließlich unter Elimination der Funktion h zu dem Formänderungsgesetz

$$d\gamma_k = \frac{1}{n\,F}\,\frac{\partial F}{\partial \overset{\times}{\tau}{}_i^k}\,da\,, \tag{90}$$

* Siehe Fußnoten 6 von Seite 2 und 1 von Seite 10.

wobei F als homogene Funktion n-ten Grades angenommen ist. Speziell wird mit $F = \overset{\times}{\Psi}_{II}$

$$d\gamma_k^i = \frac{1}{\overset{\times}{\Psi}_{II}} \overset{\times i}{\tau}_k \, da \,. \tag{91}$$

Diesen Gedankengängen liegt jedoch eine falsche Beurteilung des physikalischen Sachverhaltes zugrunde. *Hill** geht beispielsweise davon aus, daß zu der Bestimmung der 6 Formänderungsinkremente 6 Gleichungen benötigt werden. Dazu rechnet er 3 Gleichgewichtsbedingungen, 1 Fließbedingung, 1 Bedingung über die Größe der Formänderungsinkremente als Funktion der Spannungsinkremente, 1 Inkompressibilitätsbedingung. Hierzu treten die allgemeinen Formänderungsgesetze (74) der Theorie vom plastischen Potential, die die Verbindung zwischen Spannungen und Formänderungen vermitteln.

Demgegenüber ist festzustellen, daß zur Bestimmung der Formänderungsinkremente nur 3 Gleichungen benötigt werden; denn von den 6 Formänderungskomponenten lassen sich stets 3 mit Hilfe der Kompatibilitätsbedingungen eliminieren. Darin kommt die physikalische Tatsache zum Ausdruck, daß sich der Formänderungstensor auf die 3 Verschiebungskomponenten zurückführen läßt. Zu ihrer Bestimmung reichen[1] die 3 Gleichgewichtsbedingungen (34) in Verbindung mit den Formänderungsgesetzen (84) aus. Greift man bei den Gleichgewichtsbedingungen auf die Gleichung (37) zurück mit der Aufspaltung in Spannungsdeviator und Kugeltensor, so tritt hierzu noch die Bedingung

$$\overset{\times r}{\tau}_r = 0 \,, \tag{92}$$

weil die Gleichgewichtsbedingungen in diesem Falle eine Unbekannte $(\overset{\times}{p})$ mehr enthalten. Die Inkompressibilitätsbedingung ist durch die Formänderungsgesetze (84), die sich aus der Fließbedingung (82) ableiten, eliminiert. Die Fließbedingung ist bei dieser Betrachtung, wie schon einmal hervorgehoben wurde, keine zusätzliche Bedingung; sie bestimmt nur die Formänderungsgesetze. Insofern ist sie allerdings von zentraler Bedeutung. Wieweit die Fließbedingung dadurch eingeschränkt ist, daß die mit Hilfe der zugehörigen Formänderungsgesetze aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelten Formänderungen den Kompatibilitätsbedingungen genügen müssen, ist bisher nicht untersucht. Die Klärung dieser Frage vermag sicher noch interessante Einblicke zu vermitteln.

Für die bisherige Betrachtungsweise ließe sich noch anführen, daß experimentelle Versuche zur Klärung der Formänderungsgesetze im allgemeinen eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie vom plastischen Potential ergaben[2,3]. Bei manchen Versuchen ergaben sich allerdings auch gewisse systematische Abweichungen, wenn auch von geringer Größe[4]. Theoretische Untersuchungen führten dagegen auch schon zu Widersprüchen[5]. Für die neue Betrachtungsweise liegen noch keine Ergebnisse theoretischer oder experimenteller Untersuchungen vor. Die Ansätze lassen aber so viel Freiheiten offen, daß es möglich sein sollte, die Theorie weitgehend dem realen Werkstoffverhalten anzupassen. Für Belastungsfälle, bei denen $d\overset{\times i}{\tau}_k$ stets proportional $\overset{\times i}{\tau}_k$ ist, führen übrigens beide Betrachtungsweisen zu den gleichen Ergebnissen[6].

Auf einen Punkt sei abschließend noch einmal hingewiesen. Die Gleichung (84), die zur Herleitung des Formänderungsgesetzes benutzt wird, enthält noch eine gewisse physikalische Willkür, auch wenn sie sich an die Gesetze elastischer Formänderungen anschließt. Es wäre denkbar, diese Gleichung fallen zu lassen. Die Forderung, daß Fließbedingung und Formänderungsgesetze so formuliert werden müssen, daß Gleichung (83) stets erfüllt ist und sich kein Widerspruch zu den Gleichgewichtsbedingungen ergeben kann, bleibt aber davon unberührt.

7. Beanspruchung der Werkstoffe. Bei der Kaltumformung handelt es sich vorwiegend um elastisch-plastische Formänderungen mit Kaltverfestigung, die im allgemeinen stark anisotrop ist. Bei der Warmumformung machen sich dagegen bereits Zähigkeitseinflüsse stärker bemerkbar.

---

* Siehe S. 33 der in Fußnote 6 von Seite 2 zitierten Arbeit.

[1] Wegen der Eindeutigkeit der Beziehungen zwischen Spannungsänderungen und Formänderungen bei plastischen Formänderungen mit Kaltverfestigung.

[2] *W. Sautter, A. Kochendörfer* und *U. Dehlinger*, Z. Metallkunde 44 (1953) S. 442 und 553.

[3] *U. Dehlinger, J. Diehl* und *J. Meißner*, Z. Naturforschung 11a (1956) S. 37.

[4] *J. M. M. Morrison* und *W. M. Shepherd*, Proc. Inst. Mech. Eng. London 163 (1950) S. 1.

[5] *H. Lippmann*, Z. angew. Math. Mech. 38 (1958) S. 297.

[6] Das plastische Potential bei ideal-plastischem Verhalten läßt sich ferner auch als Grenzfall der neuen Betrachtungsweise deuten, steht also nicht im Widerspruch dazu.

Rein viskose Stoffe zeigen keine Erschöpfung des Formänderungsvermögens. In der Warmumformung drückt sich dies im Rekristallisationsvermögen der Werkstoffe aus. Die Rekristallisationsgeschwindigkeit hat allerdings eine endliche Größe und ist zudem stark temperaturabhängig. Daher kann man die Warmumformung nicht als rein viskos ansehen. Zur Kennzeichnung der Beanspruchung genügen deshalb nicht allein die Invarianten des Spannungstensors bzw. des Tensors der logm. Formänderungsgeschwindigkeit. Noch stärker ist es bei der Kaltumformung ausgeprägt, daß die Größe der Beanspruchung nicht allein durch einen Tensor gekennzeichnet werden kann, wie schon die thermodynamische Betrachtung der Zustandsgrößen ergab. Zwar kann man den Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich allein durch den Spannungstensor festlegen; bei isotropen Werkstoffen ist es bekanntlich vor allem die Invariante $\overset{\times}{\Psi}_{II}$, von der dieser Übergang abhängt. Die Erschöpfung des Formänderungsvermögens hängt dagegen außerdem[1] vom hydrostatischen Druck $\overset{\times}{p}$ und vor allem auch von der voraufgegangenen Formänderung, also vom logm. Formänderungstensor, von der Gestaltänderungsarbeit usw. ab. Eindeutige Zustandsgrößen zur Kennzeichnung einer Beanspruchung sind noch nicht ermittelt. So muß man sich vorerst darauf beschränken, für bestimmte Belastungsvorgänge — für diese sind die Formänderungen eine eindeutige Funktion der Spannungen und umgekehrt — die Formänderungsgrenzen anzugeben. Zu ihrer Kennzeichnung genügt dann die Angabe des Formänderungszustandes bzw. des Spannungszustandes. Dabei bedient man sich vorteilhaft der Invarianten und der aus ihnen abgeleiteten Verhältniszahlen (s. 232 und 242). Bei anisotropen Werkstoffen gehen allerdings in die kennzeichnenden Invarianten auch gewisse Körpereigenschaften ein.

Anhang 1

Abbildungstensor, Dehnungstensor und logm. Förmänderungstensor. Die Umgebung eines Körperpunktes mit den körperfesten Koordinaten x^i bildet sich auf ein ortsfestes, cartesisches Koordinatensystem y^i im unverformten Zustand (gekennzeichnet durch eine übergesetzte ○) mit Hilfe der Transformationsformeln

$$d\overset{\circ}{y}{}^i = \overset{\circ}{c}{}^i_k \, dx^k \tag{1.1}$$

ab, deren Umkehrung

$$dx^k = \overset{\circ}{\bar{c}}{}^k_i \, dy^i \tag{1.2}$$

ist. Im verformten Zustand lauten die Transformationsformeln

$$dy^i = c^i_k \, dx^k \tag{1.3}$$

bzw.

$$dx^k = \bar{c}^k_i \, dy^i \, . \tag{1.4}$$

Die Transformationsmatrizen sind im allgemeinen Funktionen des Ortes und der Zeit, sie sind keine Tensoren, weil sie sich auf zwei verschiedene Koordinatensysteme beziehen.

Bildet man dagegen im ortsfesten Koordinatensystem den verformten Körper auf den unverformten ab mit Hilfe von

$$\left.\begin{aligned} dy^i &= c^i_k \, dx^k \, , \\ &= c^i_k \, \overset{\circ}{\bar{c}}{}^k_r \, d\overset{\circ}{y}{}^r \, , \\ &= A^i_{.k} \, d\overset{\circ}{y}{}^k \, , \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

so erkennt man, daß diese Abbildung durch den gemischt-varianten Abbildungstensor $A^i_{.k}$ geleistet wird, der auf das ortsfeste Koordinatensystem bezogen und im allgemeinen unsymmetrisch ist. Er läßt sich multiplikativ aufspalten in einen symmetrischen Dehnungstensor D^{ik} bzw. D^i_k oder D_{ik}, der eine drehungsfreie Formänderung vermittelt, und in einen Versor R_{ik} bzw. $R^i_{.k}$ oder R^{ik}, der eine reine Drehung bedeutet.

Die Aufspaltung ist in verschiedener Weise möglich, je nachdem, welche Operation man sich zuerst ausgeführt denkt und auf welche Grundvektoren man die Tensoren bezieht. Formal ergeben sich dabei zwei verschiedene Zerlegungen, von denen jede wiederum zwei verschiedene Deutungen zuläßt:

$$A^i_{.k} = D^i_m \, R^m_{.k} = D^{im} \, R_{mk} \, , \tag{1.6}$$

$$A^i_{.k} = R^i_{.m} \, \widehat{D}^m_k = R^{im} \, \widehat{D}_{mk} \, . \tag{1.7}$$

[1] *E. Siebel* und *H. Beißwänger*, Tiefziehen, München 1955.

Die Schreibweise (1.6) läßt folgende Auslegungen zu:

(1.6 a) Man hat sich zuerst die Drehung ausgeführt zu denken und dann die Formänderung. Beide Tensoren sind dabei auf das ortsfeste Koordinatensystem bezogen.

(1.6 b) Man hat sich zuerst die Formänderung ausgeführt zu denken, wobei das ortsfeste Koordinatensystem mit transformiert wird (Basistransformation). Der Versor der anschließenden Drehung ist auf das transformierte Koordinatensystem bezogen.

Für die Schreibweise (1.7) erhält man folgende Deutungen:

(1.7 a) Man hat sich zuerst die Formänderung ausgeführt zu denken und dann die Drehung. Beide Tensoren sind dabei auf das ortsfeste Koordinatensystem bezogen.

(1.7 b) Man hat sich zuerst die Drehung ausgeführt zu denken, wobei das ortsfeste Koordinatensystem mitgedreht wird (Basistransformation). Der Tensor der anschließenden Formänderung ist auf das gedrehte Koordinatensystem bezogen.

Hier wird den beiden Aufspaltungsmöglichkeiten jeweils die erste Bedeutung beigemessen. Man kommt aber zu demselben Ziel, wenn man jeweils von der zweiten Bedeutung ausgeht.

Aus (1.6) eliminiert man den Versor, indem man $A^{i}_{\cdot k}$ von rechts mit dem konjugierten Tensor $A^{\cdot i}_{k}$ multipliziert. Das ergibt nach den Regeln für die Bildung konjugierter Tensorprodukte (Vertauschung der Reihenfolge und Übergang zu den konjugierten Tensoren):

$$\left.\begin{aligned} Q^{ik} = A^{i}_{\cdot m}\, A^{\cdot k}_{m} &= D^{i}_{r}\, R^{r}_{\cdot m}\, R^{\cdot s}_{m}\, D^{k}_{s}\,, \\ &= D^{ir}\, R_{rm}\, R_{ms}\, D^{sk}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Da der Versor im ortsfesten cartesischen Koordinatensystem ein orthogonaler Tensor ist, für den

$$R^{r}_{\cdot m}\, R^{\cdot s}_{m} = \delta^{r}_{m}\, \delta^{s}_{m} \qquad \text{bzw.} \qquad R_{rm}\, R_{ms} = \delta_{rm}\, \delta_{ms} \tag{1.9}$$

ist, folgt also

$$\left.\begin{aligned} Q^{ik} = D^{i}_{r}\, \delta^{r}_{m}\, \delta^{s}_{m}\, D^{k}_{s} &= D^{i}_{m}\, D^{k}_{m}\,, \\ &= D^{ir}\, \delta_{rm}\, \delta_{ms}\, D^{sk} = D^{i}_{m}\, D^{k}_{m}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Q^{ik} ist also das Quadrat des symmetrischen Dehnungstensors, bezogen auf das ortsfeste Koordinatensystem, für den Fall, daß die Drehung vor der Formänderung ausgeführt zu denken ist. Setzt man für $A^{i}_{\cdot m}$ bzw. $A^{\cdot k}_{m}$ die Werte aus (1.5) ein, so findet man

$$\left.\begin{aligned} Q^{ik} = A^{i}_{\cdot m}\, A^{\cdot k}_{m} &= c^{i}_{r}\, \overset{\circ}{c}{}^{r}_{m}\, \overset{\circ}{c}{}^{s}_{m}\, c^{k}_{s}\,, \\ &= c^{i}_{r}\, \overset{\circ}{g}{}^{rs}\, c^{k}_{s}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Transformiert man nun diesen Tensor auf das verformte körperfeste Koordinatensystem, was bei der hier zugrunde gelegten Bedeutung des Dehnungstensors nahe liegt, so ergibt sich nach den Transformationsregeln

$$\left.\begin{aligned} q^{ik} = \bar{c}^{i}_{m}\, Q^{mn}\, \bar{c}^{k}_{n} &= \bar{c}^{i}_{m}\, c^{m}_{r}\, \overset{\circ}{g}{}^{rs}\, c^{n}_{s}\, \bar{c}^{k}_{n}\,, \\ &= \delta^{i}_{r}\, \overset{\circ}{g}{}^{rs}\, \delta^{k}_{s} = \overset{\circ}{g}{}^{ik}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Der gemischt-variante quadratische Dehnungstensor, bezogen auf das verformte körperfeste Koordinatensystem, ist also

$$q^{i}_{k} = q^{ir}\, g_{rk} = \overset{\circ}{g}{}^{ir}\, g_{rk}\,. \tag{1.13}$$

Den logarithmischen Formänderungstensor erhält man aus ihm durch die Beziehung

$$\varepsilon^{i}_{k} = \ln \sqrt{(q^{i}_{k})} = \frac{1}{2} \ln (q^{i}_{k})\,, \tag{1.14}$$

wobei der Logarithmus und die Wurzel als Tensorfunktionen aufzufassen sind.

Geht man von der Darstellung (1.7) aus, so erhält man durch Multiplikation mit dem konjugierten Tensor von links einerseits

$$\left.\begin{aligned}\hat{Q}_{ik} = A_i^{\cdot m}\, A_{\cdot k}^{m} &= \hat{D}_i^{r}\, R_r^{\cdot m}\, R_{\cdot s}^{m}\, \hat{D}_k^{s}\,,\\ &= \hat{D}_{ir}\, R^{rm}\, R^{ms}\, \hat{D}_{sk}\,,\\ &= \hat{D}_i^{m}\, \hat{D}_k^{m}\,,\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

also wieder das Quadrat des Dehnungstensors bezogen auf das ortsfeste System, freilich jetzt für den Fall, daß die Formänderung vor der Drehung ausgeführt zu denken ist. Andererseits ergibt sich durch Einsetzen

$$\left.\begin{aligned}\hat{Q}_{ik} = A_i^{\cdot m}\, A_{\cdot k}^{m} &= \overset{\circ}{c}_i^{r}\, c_r^{m}\, c_s^{m}\, \overset{\circ}{c}_k^{s}\,,\\ &= \overset{\circ}{c}_i^{r}\, g_{rs}\, \overset{\circ}{c}_k^{s}\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

und nach Transformation auf das unverformte körperfeste Koordinatensystem, was bei der hier zugrunde gelegten Bedeutung des Dehnungstensors allein sinnvoll ist,

$$\left.\begin{aligned}\hat{q}_{ik} = \overset{\circ}{c}_i^{m}\, \hat{Q}_{mn}\, \overset{\circ}{c}_k^{n} &= \overset{\circ}{c}_i^{m}\, \overset{\circ}{c}_m^{r}\, g_{rs}\, \overset{\circ}{c}_n^{s}\, \overset{\circ}{c}_k^{n}\,,\\ &= \delta_i^{r}\, g_{rs}\, \delta_k^{s} = g_{ik}\,.\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Daraus folgt wieder

$$\hat{q}_k^{i} = \overset{\circ}{g}^{ir}\, q_{rk} = \overset{\circ}{g}^{ir}\, g_{rk}\,. \tag{1.18}$$

Es ist also

$$\hat{q}_k^{i} = q_k^{i}\,, \tag{1.19}$$

d. h. es ergibt sich aus beiden Betrachtungsweisen formal das gleiche Ergebnis. Das gilt allerdings nur, wenn man die Tensoren gemischt-variant schreibt. Damit ist die Bevorzugung dieser Schreibweise bereits hinreichend begründet.

Geht man von den beiden anderen Deutungen aus (1.6 b) und (1.7 b), die die Schreibweisen (1.6) und (1.7) noch zulassen, so wird man ebenfalls zu den formal gleichen Ergebnissen (1.13) bzw. (1.18) geführt. Der logarithmische Formänderungstensor (1.14) läßt also vier verschiedene physikalisch sinnvolle Deutungen zu, wobei er teils auf das unverformte, teils auf das verformte körperfeste Koordinatensystem (teils vor der Drehung, teils nach der Drehung) bezogen zu denken ist. Hierin äußert sich seine affine Invarianz.

Die Bedeutung des Tensors q_k^i ergibt sich ferner besonders daraus, daß er durch Multiplikation den kovarianten Maßtensor des unverformten körperfesten Koordinatensystems in den des verformten überführt

$$\overset{\circ}{g}_{im}\, q_k^{m} = \overset{\circ}{g}_{im}\, \overset{\circ}{g}^{mr}\, g_{rk} = g_{ik}\,. \tag{1.20}$$

Der inverse Tensor

$$(q_i^{k})^{-1} = g^{ir}\, \overset{\circ}{g}_{rk} = \overset{\circ}{g}_{kr}\, g^{ri} \tag{1.21}$$

überführt hingegen den kontravarianten Maßtensor

$$\overset{\circ}{g}^{im}(q_k^{m})^{-1} = \overset{\circ}{g}^{im}\, \overset{\circ}{g}_{mr}\, g^{rk} = g^{ik}\,. \tag{1.22}$$

Anhang 2

Zusammenhang zwischen Formänderungstensor und Verschiebungsvektor. Im ortsfesten cartesischen Koordinatensystem hat der Verschiebungsvektor u^i die Maßzahlen

$$u^i = y^i - \overset{\circ}{y}^i\,. \tag{2.1}$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u^i}{\partial x_k} &= \frac{\partial y^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \overset{\circ}{y}^i}{\partial x^k}\,,\\ &= c_k^i - \overset{\circ}{c}_k^i\,,\\ c_k^i &= \overset{\circ}{c}_k^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\,.\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

oder

Multipliziert man die Matrix c_k^i von links mit der konjugierten Matrix, so erhält man

$$c_i^m\, c_k^m = \mathring{c}_i^m\, \mathring{c}_k^m + \mathring{c}_i^m \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \mathring{c}_k^m \frac{\partial u^m}{\partial x^i} + \frac{\partial u^m}{\partial x^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^k},$$

also

$$g_{ik} = \mathring{g}_{ik} + \mathring{c}_i^m \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \mathring{c}_k^m \frac{\partial u^m}{\partial x^i} + \frac{\partial u^m}{\partial x^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^k}. \tag{2.3}$$

Transformiert man u^i auf das unverformte körperfeste Koordinatensystem, so folgt

$$\tilde{v}^i = \mathring{c}_k^i\, u^k \qquad \text{oder} \qquad u^i = \mathring{c}_k^i\, \tilde{v}^k. \tag{2.4}$$

Mit Hilfe des absoluten Differential-Kalküls* findet man sodann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^m}{\partial x^i} &= \mathring{c}_r^m \frac{\partial \tilde{v}^r}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathring{c}_r^m}{\partial x^i}\tilde{v}^r, \\ &= \mathring{c}_r^m\, \underline{\tilde{v}^r}_{|i}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Dabei bezeichnet $\underline{\tilde{v}^r}_{|i}$ die sogenannte kovariante Ableitung:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\tilde{v}^r}_{|i} &= \frac{\partial \tilde{v}^r}{\partial x^i} + \mathring{c}_n^r \frac{\partial \mathring{c}_s^n}{\partial x^i}\tilde{v}^s, \\ &= \frac{\partial \tilde{v}^r}{\partial x^i} + \mathring{\Gamma}_{is}^r\, \tilde{v}^s. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$\mathring{\Gamma}_{is}^r$ sind die auf das unverformte Koordinatensystem bezogenen *Christoffel*schen Symbole zweiter Art, die sich beispielsweise in folgender Art schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} \mathring{\Gamma}_{is}^r &= \mathring{c}_n^r \frac{\partial \mathring{c}_s^n}{\partial x^i}, \\ &= \frac{1}{2}\,\mathring{g}^{rk}\left(\frac{\partial \mathring{g}_{ik}}{\partial x^s} + \frac{\partial \mathring{g}_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathring{g}_{is}}{\partial x^k}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Setzt man (2.5) in (2.3) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &= \mathring{g}_{ik} + \mathring{c}_i^m \mathring{c}_r^m\, \underline{\tilde{v}^r}_{|k} + \mathring{c}_k^m \mathring{c}_r^m\, \underline{\tilde{v}^r}_{|i} + \mathring{c}_r^m \mathring{c}_l^m\, \underline{\tilde{v}^r}_{|i}\, \underline{\tilde{v}^l}_{|k}, \\ &= \mathring{g}_{ik} + \mathring{g}_{ir}\, \underline{\tilde{v}^r}_{|k} + \mathring{g}_{kr}\, \underline{\tilde{v}^r}_{|i} + \mathring{g}_{rl}\, \underline{\tilde{v}^r}_{|i}\, \underline{\tilde{v}^l}_{|k}, \\ &= \mathring{g}_{ik} + \underline{\tilde{v}_i}_{|k} + \underline{\tilde{v}_k}_{|i} + \underline{\tilde{v}_r}_{|i}\, \underline{\tilde{v}^r}_{|k} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

und schließlich

$$q_k^i = \mathring{g}^{ir} g_{rk} = \delta_k^i + \underline{\tilde{v}^i}_{|k} + \underline{\tilde{v}_k}^{|i} + \underline{\tilde{v}_r}^{|i}\, \underline{\tilde{v}^r}_{|k}. \tag{2.9}$$

Mit q_k^i kann man nun den logarithmischen Formänderungstensor

$$\varepsilon_k^i = \frac{1}{2}\ln(q_k^i) \tag{2.10}$$

bilden und hat damit den gesuchten Zusammenhang zwischen Formänderungstensor und Verschiebungsvektor.

Man kann den Verschiebungsvektor auch auf das verformte körperfeste Koordinatensystem beziehen. In diesem Fall löst man Gleichung (2.2) zweckmäßig nach $\mathring{c}_k^i$ auf und multipliziert dann wiederum mit der konjugierten Matrix von links. Nach Transformation des Verschiebungsvektors auf das verformte Koordinatensystem erhält man zunächst

$$\mathring{g}_{rk} = g_{ik} - \underline{v_i}_{|k} - \underline{v_k}_{|i} + \underline{v^m}_{|i}\, \underline{v_m}_{|k} \tag{2.11}$$

---

* Siehe Fußnoten 12 und 13 von Seite 2.

und schließlich

$$g^{ir}\,\mathring{g}_{ik} = (q_i^k)^{-1} = \delta_k^i - \underline{v^i}_{|k} - \underline{v_k}^{|i} + \underline{v^m}^{|i}\,\underline{v_m}_{|k}\,. \tag{2.12}$$

Den logarithmischen Formänderungstensor erhält man daraus durch die Beziehung

$$\varepsilon_k^i = \frac{1}{2}\ln(q_k^i) = -\frac{1}{2}\ln(q_i^k)^{-1}\,. \tag{2.13}$$

Anhang 3

Gleichgewichtsbedingung. Es wird das Kräftegleichgewicht an einem Parallelepiped des verformten Körpers betrachtet, das durch die Ebenen $x^i = \text{konst.}$ und $x^i + dx^i = \text{konst.}$ gebildet wird. Die durch die Ebenen $x^i = \text{konst.}$ gebildeten Begrenzungsflächen werden durch die Vektoren

$$\left.\begin{aligned} d\overset{*}{F}_i &= -\sqrt{g}\,dx^m\,dx^n\,,\\ &= -\frac{dV}{dx^i} \end{aligned}\right\} \qquad (m \neq n \neq i) \tag{3.1}$$

repräsentiert, wobei

$$dV = \sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 \tag{3.2}$$

das Volumen des Parallelepipeds und g die Determinante des kovarianten Maßtensors im Punkte $x^i + \frac{1}{2}dx^i$ ist. Zu den Ebenen $x^i + dx^i = \text{konst.}$ gehören die Vektoren

$$\left.\begin{aligned} dF_i &= +\sqrt{g}\,dx^m\,dx^n\,,\\ &= +\frac{dV}{dx^i}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (m \neq n \neq i) \tag{3.3}$$

Für die an diesem Volumenelement angreifenden Kräfte gilt nun

$$\sigma_k^i\,d\overset{*}{F}_i + (\sigma_k^i + \underline{\sigma_k^i}_{|i}\,dx^i)\,dF_i + \varrho\,dV\,k_k - \varrho\,dV\,b_k = 0 \qquad (i \text{ summiert})\,. \tag{3.4}$$

Hierin ist ϱ die Dichte des Körpers, k_k der Vektor der auf die Masseneinheit bezogenen Kräfte und b_k der Beschleunigungsvektor.

Setzt man $d\overset{*}{F}_i$ und dF_i ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned} -\sigma_k^i\frac{dV}{dx^i} + \sigma_k^i\frac{dV}{dx^i} + \underline{\sigma_k^i}_{|i}\,dV + \varrho\,dV\,(k_k - b_k) = 0\\ \text{oder}\qquad \underline{\sigma_k^i}_{|i} + \varrho\,(k_k - b_k) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Das ist die bekannte Gleichgewichtsbedingung.

Bildet man das Moment der Kräfte um den Mittelpunkt des Parallelepipeds, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, die Bedingung

$$\varepsilon_{ikl}\,\sigma^{ik}\frac{dV}{dx^k}\cdot\frac{1}{2}\,dx^k = 0 \qquad (k \text{ summiert}) \tag{3.6}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ikl}\,\sigma^{ik} &= 0\,,\\ \sigma^{ik} - \sigma^{ki} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

d. h.

Daraus folgt also die Symmetrie des Spannungstensors.

Anhang 4

Formänderungsarbeit. Unterwirft man die Volumenelemente eines Körpers, der sich im Gleichgewicht befindet ($b_i = 0$), virtuellen Verschiebungen δv^i und integriert über das gesamte Körpervolumen V, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \int_V (\underline{\sigma_i^k}_{|k}\,\delta v^i + \varrho\,k_i\,\delta v^i)\,dV = 0\\ \text{oder}\qquad \int_V (\underline{\sigma^{ik}}_{|k}\,\delta v_i + \varrho\,k^i\,\delta v_i)\,dV = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Der Vektor der virtuellen Verschiebung ist hierbei wie σ_k^i bzw. σ^{ik} auf das verformte Koordinatensystem zu beziehen.

Daraus folgt zunächst, wenn man die kontravariante Schreibweise des Spannungstensors σ^{ik} benutzt, die hier etwas zweckmäßiger ist,

$$\int_V \underline{\sigma^{ik}\,\delta v_i|_k}\,dV - \int_V \sigma^{ik}\,\underline{\delta v_i|_k}\,dV + \int_V \varrho\,k^i\,\delta v_i\,dV = 0\,. \tag{4.2}$$

Formt man das erste Integral mit Hilfe des *Gauß*schen Integralsatzes in ein Oberflächenintegral um, so erhält man

$$\int_F \sigma^{ik}\,\delta v_i\,dF_k + \int_V \varrho\,k^i\,\delta v_i\,dV = \int_V \sigma^{ik}\,\underline{\delta v_i|_k}\,dV\,. \tag{4.3}$$

Der erste Term der linken Seite stellt die Arbeit der Oberflächenkräfte, der zweite die Arbeit der Volumenkräfte dar. Die rechte Seite ergibt die Formänderungsarbeit.

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors kann man für die rechte Seite auch schreiben

$$\int_V \sigma^{ik}\,\underline{\delta v_i|_k}\,dV = \frac{1}{2}\int \sigma^{ik}\,(\underline{\delta v_i|_k} + \underline{\delta v_k|_i})\,dV\,. \tag{4.4}$$

Für den Zusammenhang zwischen Verschiebungsvektor und Maßtensor gilt nach Anhang 2, Gleichung (2.8) allgemein

$$g_{ik} - \mathring{g}_{ik} = \Delta g_{ik} = \underline{\tilde{v}_i|_k} + \underline{\tilde{v}_k|_i} + \underline{\tilde{v}_r|_i}\,\underline{\tilde{v}^r|_k}\,, \tag{4.5}$$

wobei auf der rechten Seite alles auf das unverformte körperfeste Koordinatensystem bezogen ist. Beachtet man, daß hier nur virtuelle Verschiebungen betrachtet werden, bei denen das verformte Koordinatensystem als Bezugsbasis dient, so ergibt sich

$$\delta g_{ik} = \underline{\delta v_i|_k} + \underline{\delta v_k|_i} + \underline{\delta v_r|_i}\,\underline{\delta v^r|_k}\,. \tag{4.6}$$

Das letzte Glied der rechten Seite ist bei infinitesimalen Verschiebungen vernachlässigbar klein Es wird also

$$\delta g_{ik} = \underline{\delta v_i|_k} + \underline{\delta v_k|_i}\,, \tag{4.7}$$

und für die Formänderungsarbeit erhält man

$$\delta A = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{ik}\,\delta g_{ik}\,dV\,. \tag{4.8}$$

In dieser Form wird die Formänderungsarbeit üblicherweise in der modernen Elastizitätstheorie angegeben*.

Geht man nun wieder zum gemischt-varianten Spannungstensor über, so erhält man zunächst

$$\delta A = \frac{1}{2}\int_V \sigma_m^i\,g^{mk}\,\delta g_{ki}\,dV \tag{4.9}$$

oder nach Erweiterung mit dem Maßtensor des unverformten Koordinatensystems

$$\delta A = \frac{1}{2}\int_V \sigma_m^i\,(g^{mr}\,\mathring{g}_{rn})\,\delta(\mathring{g}^{ns}\,g_{si})\,dV\,. \tag{4.10}$$

Benutzt man die in Anhang 1 abgeleiteten Definitionen für den quadratischen Dehnungstensor

$$q_i^n = \mathring{g}^{ns}\,g_{si} \qquad \text{und} \qquad (q_m^n)^{-1} = g^{mr}\,\mathring{g}_{rn}\,, \tag{4.11}$$

* Siehe Fußnote 12 von Seite 2.

so geht (4.10) über in

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= \frac{1}{2}\int_V \sigma_m^i\,(q_m^n)^{-1}\,\delta q_i^n\,dV\,,\\ &= \int_V \sigma_m^i\,\frac{1}{2}\,\delta\ln(q_i^m)\,dV\,,\\ &= \int_V \sigma_m^i\,\delta\varepsilon_i^m\,dV\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

wobei ε_k^i der logarithmische Formänderungstensor ist.

Die Formänderungsarbeit eines Elementes, bezogen auf die Masseneinheit ist schließlich

$$\delta a = \frac{1}{\varrho}\,\sigma_m^i\,\delta\varepsilon_i^m = \overset{\times}{\sigma}{}_m^i\,\delta\varepsilon_i^m \tag{4.13}$$

mit

$$\overset{\times}{\sigma}{}_m^i = \frac{1}{\varrho}\,\sigma_m^i\,. \tag{4.14}$$

(Eingegangen am 9. April 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *Theodor Lehmann*, Hannover, Podbielskistraße 93.

Über die Biegung einer unendlich erstreckten orthotropen Platte auf elastischer Unterlage

Von S. Woinowsky-Krieger

1. Grundgleichungen. Es liege eine Platte konstanter Dicke vor, die in bezug auf ihre elastischen Eigenschaften überall zwei zueinander und zu ihrer Mittelebene senkrechte Symmetrieebenen besitzen möge. Sind $x = \text{konst.}$ und $y = \text{konst.}$ diese Ebenen, so lautet die Differentialgleichung für die Einsenkung einer solchen orthotropen elastisch gebetteten Platte

$$\nabla^2 w \equiv D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) - p(x, y) . \tag{1}$$

Hierin ist q die Intensität der gegebenen Auflast und p die Intensität der Bodenreaktion, während D_x, H, D_y Plattensteifigkeiten bezeichnen, deren Bedeutung wir als bekannt voraussetzen wollen.[1]

Die Eigenschaften der Unterlage lassen sich in einer ziemlich allgemeinen Weise durch die Annahme erfassen, daß eine an der Stelle (ξ, η) der Bodenoberfläche aufgebrachte Punktlast $P = 1$ an einer Stelle (x, y) dieser Oberfläche eine Einsenkung $K(s)$ erzeugt, wobei $s = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ und K eine von den Eigenschaften der Unterlage abhängige Funktion von s bezeichnen soll. Der gegenseitige Druck $p(\xi, \eta)$ zwischen Platte und Unterlage erzeugt somit an der Stelle (x, y) eine Gesamteinsenkung

$$w(x, y) = \int_E p(\xi, \eta)\, K(s)\, d\xi\, d\eta = \int_E [q(\xi, \eta) - \nabla^2 w(\xi, \eta)]\, K(s)\, d\xi\, d\eta , \tag{2}$$

wobei das Doppelintegral sich über die gesamte Begrenzungsebene, d. h. von $\xi = -\infty$, $\eta = -\infty$ bis $\xi = +\infty$, $\eta = +\infty$, erstreckt.

Unter der Annahme einer zum Koordinatenkreuz doppeltsymmetrischen Belastung q setzen wir zur Auflösung der Gleichung (2)

$$w(x, y) = \int_E W(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y\, d\alpha\, d\beta \tag{3}$$

und, sofern das nachstehende Integral sich über die gesamte Ebene α, β erstreckt,

$$q(\xi, \eta) = \int_E Q(\alpha, \beta) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta\, d\alpha\, d\beta . \tag{4}$$

Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (2) liefert mit der Abkürzung

$$N(\alpha, \beta) = \alpha^4 D_x + 2\alpha^2 \beta^2 H + \beta^4 D_y \tag{5}$$

das Resultat

$$W(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y = [Q(\alpha, \beta) - W(\alpha, \beta)\, N(\alpha, \beta)] \int_E K(s) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta\, d\xi\, d\eta . \tag{6}$$

Im Sonderfall einer Auflast von der Form $p = \cos \alpha x \cos \beta y$ ließe sich zeigen, daß die zugehörige Bodeneinsenkung in der Form

$$w = C(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \tag{7}$$

mit

$$C(\alpha, \beta) = \int_E K\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cos \alpha x \cos \beta y\, dx\, dy \tag{8}$$

darstellbar ist[2]. Andererseits ist im selben Falle

$$w = \int_E K(s) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta\, d\xi\, d\eta . \tag{9}$$

Aus dem Vergleich von (7) mit (9) folgt die Identität

$$\int_E K(s) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta\, d\xi\, d\eta = C(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y . \tag{10}$$

[1] Siehe z. B. *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 300, Wien 1956, worin K_x, K_y an Stelle von D_x, D_y stehen.
[2] Vgl. *B. G. Korenev*, Doklady Akad. Nauk, 78 (1951) S. 417.

Setzt man nun den linken Teil von (10) in die Gleichung (6) ein, so lautet das Ergebnis

$$W(\alpha, \beta) = [Q(\alpha, \beta) - N(\alpha, \beta)\, W(\alpha, \beta)]\, C(\alpha, \beta)\,. \tag{11}$$

Die Funktion $W(\alpha, \beta)$ läßt sich hieraus bestimmen. Der Ansatz (3) liefert somit endgültig

$$w(x, y) = \int_E \frac{Q(\alpha, \beta)\, C(\alpha, \beta)}{1 + C(\alpha, \beta)\, N(\alpha, \beta)} \cos \alpha\, x \cos \beta\, y\, d\alpha\, d\beta\,, \tag{12}$$

worin nach dem *Fourier*schen Theorem

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\,\pi^2} \int_E q(\xi, \eta) \cos \alpha\, \xi \cos \beta\, \eta\, d\xi\, d\eta \tag{13}$$

anzunehmen ist. Die zugehörige Bodenpressung ergibt sich schließlich aus der Gleichung (1) zu

$$p(x, y) = \int_E \frac{Q(\alpha, \beta)}{1 + C(\alpha, \beta)\, N(\alpha, \beta)} \cos \alpha\, x \cos \beta\, y\, d\alpha\, d\beta\,. \tag{14}$$

Für den wichtigen Fall einer in $\xi = 0$, $\eta = 0$ angreifenden Punktlast P gilt $Q(\alpha, \beta) = P/4\,\pi^2$, und es ergibt sich dementsprechend eine elastische Fläche der Platte von der Form

$$w = \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{C(\alpha, \beta)}{1 + C(\alpha, \beta)\, N(\alpha, \beta)} \cos \alpha\, x \cos \beta\, y\, d\alpha\, d\beta\,, \tag{15}$$

während sich die Bodenpressung nach

$$p = \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \alpha\, x \cos \beta\, y}{1 + C(\alpha, \beta)\, N(\alpha, \beta)}\, d\alpha\, d\beta \tag{16}$$

verteilt.

Von der Beziehung (8) schließt man noch allgemein auf die Reziprozitätsformel

$$K(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{4\,\pi^2} \int_E C(\alpha, \beta) \cos \alpha\, x \cos \beta\, y\, d\alpha\, d\beta\,. \tag{17}$$

Mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{18}$$

läßt sich die Relation (8) auch einfacher und zwar in der Form

$$C(\gamma) = 2\,\pi \int_0^\infty K(r)\, J_0(\gamma\, r)\, \gamma\, d\gamma \tag{19}$$

schreiben[1], sofern J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung bezeichnet.

2. Sonderergebnisse in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Unterlage. Je nach der Hypothese, die zur Erfassung der mechanischen Eigenschaften der Plattenunterlage gewählt wird, kommt man im Einzelnen zu den folgenden Ergebnissen:

a) Bodenziffer-Theorie. Der *Winkler-Zimmermann*schen Annahme gemäß ist $C(\gamma)$ eine von γ unabhängige Konstante. Aus dem Vergleich der Ausdrücke (15) und (16) ergibt sich dann

$$C(\gamma) = \frac{1}{k}\,, \tag{20}$$

wo die „Bodenziffer" k das konstante Verhältnis zwischen dem jeweiligen Bodendruck und der betreffenden Einsenkung bedeutet.

b) Elastischer Halbraum. Sind E_0 und ν_0 der Elastizitätsmodul und die Querdehnungszahl des isotropen Halbraumes, auf dem die Platte aufruhen soll, so gilt für den Kern K der Ausdruck

$$K(r) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi\, E_0\, r}\,, \tag{21}$$

[1] Wegen der Umformung ähnlicher, auch im Abschnitt 4 vorkommender Integrale siehe *G. N. Watson*, Theory of Bessel Functions, S. 124, Cambridge 1948.

und die Formel (19) liefert

$$C(\gamma) = \frac{2\,(1 - \nu_0^2)}{E_0\,\gamma}\,. \tag{22}$$

c) Allgemeiner Fall. Setzt man allgemeiner

$$K(r) = \frac{B}{\sqrt{r^2 + m^2}}\,, \tag{23}$$

wo B und m wiederum Konstanten sind, so ergibt sich ganz entsprechend

$$C(\gamma) = \frac{2\,\pi\,B}{\gamma}\,e^{-m\,\gamma}\,. \tag{24}$$

d) Exponentialkern. Der Kern

$$K(r) = \frac{B}{2\,m^2}\,e^{-\frac{r^2}{4\,m^2}} \tag{25}$$

mit den Konstanten B und m führt schließlich zu

$$C(\gamma) = 2\,\pi\,B\,e^{-m^2\gamma^2}\,. \tag{26}$$

3. Sonderlösung für $H = \sqrt{D_x\,D_y}$. Zu allererst soll dieser zu bedeutenden Vereinfachungen führende Fall betrachtet werden. Bei $D_x \neq D_y$ sind die Steifigkeiten des Tragwerkes in den beiden Richtungen zwar verschieden groß, aber seine Torsionssteifigkeit entspricht etwa derjenigen eine rippenlosen Platte. Ursache der Anisotropie kann in diesem Falle eine in den Richtungen x und y verschieden starke Plattenbewehrung sein. In diesem Abschnitt soll nur die Bettungsziffertheorie berücksichtigt werden, da nur sie, mathematisch gesehen, eine wesentliche Vereinfachung des Problems mit sich bringt.

Mit den Bezeichnungen

$$D = \sqrt{D_x\,D_y}\,, \qquad \lambda = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \tag{27}$$

hat man zunächst

$$D_x = D\,\lambda^{-2}\,, \qquad H = D\,, \qquad D_y = D\,\lambda^2\,. \tag{28}$$

Es sei weiterhin

$$x\,\sqrt{\lambda} = x_1\,, \qquad \frac{y}{\sqrt{\lambda}} = y_1\,, \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = \alpha_1\,, \qquad \beta\,\sqrt{\lambda} = \beta_1\,, \tag{29}$$

und schließlich

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\,. \tag{30}$$

Aus den Gleichungen (5), (28) und (30) folgt alsdann

$$N(\alpha, \beta) = D(\alpha^2\,\lambda^{-1} + \beta^2\,\lambda)^2 = D\,\gamma_1^4\,. \tag{31}$$

Eine Einzellast P greife nun in $x = y = 0$ an. Mit $C(\gamma) = 1/k$ geht dann der allgemeinere Ausdruck (15) für die zugehörige elastische Fläche über in

$$w = \frac{P}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos\alpha_1 x_1 \cos\beta_1 y_1}{k + D\,\gamma_1^4}\,d\alpha_1\,d\beta_1\,. \tag{32}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich durch nichts von dem entsprechenden, nur in den Koordinaten x, y, geschriebenen Ausdruck für die Durchbiegung einer schwimmenden isotropen Platte[1]. Setzt man noch

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}\,, \qquad \frac{1}{l}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \varrho\,, \tag{33}$$

so läßt sich (32) in folgender Weise durch die *Thomson*sche Funktion kei ausdrücken[2]:

$$w = -\frac{P\,l^2}{2\,\pi\,D}\,\mathrm{kei}\,\varrho = -\frac{P\,l^2}{2\,\pi\,D}\,\mathrm{kei}\left(\frac{x^2}{l^2}\,\lambda + \frac{y^2}{l^2}\,\lambda^{-1}\right)^{1/2}. \tag{34}$$

---

[1] Vgl. *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 246 und Ing.-Arch. 17 (1949) S. 142.

[2] Es gilt $\mathrm{kei}\,\varrho = (\pi/2)\,Im\,Y_0\left(\varrho\,e^{i\,\pi/4}\right) - (\pi/2)\,Re\,J_0\left(\varrho\,e^{i\,\pi/4}\right) = -(\pi/2)\,Z_3(\varrho)$, wo J_0, Y_0 *Bessel*sche Funktionen und Z_3 eine der von *F. Schleicher* tabulierten Funktionen bezeichnet.

Höhenlinien dieser elastischen Fläche sind in der Richtung der größeren Plattensteifigkeit langgezogene Ellipsen. Der Biegepfeil unter der Last ergibt sich mit kei $\varrho = -\pi/4$ für $\varrho = 0$ zu

$$w(0) = \frac{P}{8\sqrt{k\,D}}. \tag{35}$$

Da Biegemomente einer dünnen Platte unter einer Punktlast stets unendlich werden, soll die Kraft P gleichmäßig auf eine kleine Kreisfläche vom Halbmesser $c \ll l$ mit dem Mittelpunkt in $x = y = 0$ verteilt werden. Die Funktion kei ϱ möge nur mit den folgenden Anfangsgliedern ihrer Entwicklung angesetzt werden:

$$\operatorname{kei}\varrho = -\frac{\varrho^2}{4}\ln\varrho - \frac{\pi}{4} + 0{,}279\,\varrho^2. \tag{36}$$

Die Krümmung $\partial^2 w/\partial x^2$ der Fläche (34) berechnet sich hiernach zu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{P\lambda}{4\pi D}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{l^2}\lambda + \frac{y^2}{l^2}\lambda^{-1}\right) + \frac{x^2\lambda^2}{l^2}\left(\frac{x^2}{l^2}\lambda + \frac{y^2}{l^2}\lambda^{-1}\right)^{-1} + 0{,}616\right]. \tag{37}$$

Indem man noch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ setzt, erhält man im Mittelpunkt der angenommenen Druckfläche

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{P\lambda}{4\pi^2 c^2 D}\int_0^c r\,dr \int_0^{2\pi}\left[\ln\frac{r}{l} + \frac{1}{2}\ln\left(\lambda\cos^2\vartheta + \lambda^{-1}\sin^2\vartheta\right) + \lambda^2\left(\lambda + \lambda^{-1}\operatorname{tg}^2\vartheta\right)^{-1} + 0{,}616\right] d\vartheta.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man die erste der beiden folgenden Formeln, und wenn man in ihr λ durch $1/\lambda$ ersetzt auch die zweite:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{P\lambda}{4\pi D}\left[\ln\left(\frac{l}{c}\cdot\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right) + \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+1} + 0{,}616\right], \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{P\lambda^{-1}}{4\pi D}\left[\ln\left(\frac{l}{c}\cdot\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right) + \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+1} + 0{,}616\right]. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Im Ansatz für die Biegemomente

$$m_x = -D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad m_y = -D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

muß die Relation $D_x\nu_y = D_y\nu_x$, die Querdehnungszahlen ν_x und ν_y betreffend, berücksichtigt werden. Führt man dementsprechend die Bezeichnung $\nu_x = \nu\lambda^{-2}$, $\nu_y = \nu\lambda^2$ mit $\nu^2 = \nu_x\nu_y$ ein, so gelangt man zu dem folgenden Ausdrücken für die Biegemomente im Zentrum der Druckfläche:

$$\left.\begin{aligned} m_x(0) &= \frac{P(1+\nu)}{4\pi\lambda}\left[\ln\left(\frac{l}{c}\,\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right) + \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+1} + 0{,}616\right], \\ m_y(0) &= \frac{P\lambda(1+\nu)}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{l}{c}\,\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right) + \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+1} + 0{,}616\right]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

4. Struktur einer allgemeineren Lösung. Die Last sei zunächst über einen Kreisumfang vom Halbmesser c mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang gleichformig mit der Intensität $p = P/2\pi c$ verteilt. Unter Einführung der Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x}, \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

ergibt sich nun auf Grund der Gleichung (13) das Resultat

$$Q(\gamma,\varphi) = \frac{p\,c}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\cos(\gamma\,c\cos\varphi)\cos(\gamma\,c\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{p\,c}{2\pi}\,J_0(\gamma\,c). \tag{41}$$

Der Ausdruck (5) läßt sich dementsprechend umschreiben in

$$N(\gamma, \varphi) = \gamma^4 \Phi \tag{42}$$

mit

$$\Phi = D_x \cos^4 \varphi + 2 H \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_y \sin^4 \varphi . \tag{43}$$

Die Gleichung (12) liefert somit die elastische Fläche

$$w(x, y) = \frac{p c}{2 \pi} \int_0^\infty C(\gamma) J_0(\gamma c) \gamma \, d\gamma \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\gamma x \cos\varphi) \cos(\gamma y \sin\varphi)}{1 + C(\gamma) \gamma^4 \Phi} d\varphi . \tag{44}$$

Es sei nun weiter

$$\frac{1}{1 + C(\gamma) \gamma^4 \Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\gamma) \cos 2 n \varphi . \tag{45}$$

Bestimmt man die beiden ersten Koeffizienten dieser *Fourier*-Entwicklung durch irgendein Verfahren, so ergeben sich alle folgenden mit Hilfe einfacher Rekursionsformeln. Geht man anschließend mit der Reihe (45) in den Ausdruck (44) ein, so hat man vorerst das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(\gamma x \cos\varphi) \cos(\gamma y \sin\varphi) \cos 2 n \varphi \, d\varphi = 2 \pi (-1)^n J_{2n}(\gamma r) \cos 2 n \vartheta \tag{46}$$

zu beachten. Man gelangt auf diese Weise zu dem Ergebnis

$$w(r, \vartheta) = p c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos 2 n \vartheta \int_0^\infty A_{2n}(\gamma) C(\gamma) J_0(\gamma c) J_{2n}(\gamma r) \gamma \, d\gamma , \tag{47}$$

wobei $C(\gamma)$ nach wie vor nur von den Eigenschaften der Unterlage abhängig und durch den Ausdruck (19) gegeben ist. Wie der Vergleich von (12) und (14) lehrt, erhält man die der Einsenkung (47) entsprechende Verteilung des Bodendruckes, indem man in (47) an Stelle von $C(\gamma)$ einfach eine Eins setzt. Im Sonderfall einer Punktlast P im Koordinatenanfang hat man nur $p = P/2\pi c$ anzunehmen und zum Grenzfall $c \to 0$ überzugehen. Das Resultat ist dann

$$w(r, \vartheta) = \frac{P}{2 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos 2 n \vartheta \int_0^\infty A_{2n}(\gamma) C(\gamma) J_{2n}(\gamma r) \gamma \, d\gamma . \tag{48}$$

Im Fall $D_x = D_y$, also gleichberechtigter Richtungen x und y verschwinden, wie man sich leicht überzeugt, alle Glieder mit $n = 1, 3, \ldots$, und die vorstehenden Summen behalten nur Glieder mit A_0, A_4, A_8 usw.

5. Biegepfeil und Bodenpressung unter einer Punktlast. Wir beschränken uns hier auf die Angabe dieser zwei Größen in einigen einfacheren Sonderfällen. Der allgemeine Ausdruck für den Biegepfeil lautet, wenn man in (15) $x = y = 0$ setzt und von den Bezeichnungen (40), (42) Gebrauch macht,

$$w(0) = \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty \frac{C(\gamma) \gamma \, d\gamma}{1 + C(\gamma) \gamma^4 \Phi} . \tag{49}$$

Die maximale Bodenpressung erhält man aus (49), indem man vorerst im Zähler des Integranden $C(\gamma)$ durch eine Eins ersetzt und alsdann die Integration ausführt.

a) Bodenziffertheorie. Für $C(\gamma) = 1/k$ liefert die vorstehende Formel den Ausdruck

$$w(0) = \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty \frac{\gamma \, d\gamma}{k + \gamma^4 \Phi} = \frac{P}{4 \pi \sqrt{k}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} . \tag{50}$$

Bei einem in den Richtungen x und y gleich steifem Balkenrost ist mit $D_x = D_y \equiv D_1$ und $H = \eta D_1$ zu rechnen, worin η eine gegebene Zahl ist. Es ergibt sich hierfür, der Gleichung (43) entsprechend,

$$\Phi = D_1 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 2 \varphi) \tag{51}$$

mit

$$\varepsilon^2 = \frac{1-\eta}{2} \tag{52}$$

und weiterhin, mit $2\varphi = \psi$ und $l_1 = \sqrt[4]{D_1/k}$,

$$w(0) = \frac{P}{8\pi\sqrt{k\,D_1}} \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\psi}} = \frac{P}{8\sqrt{k\,D_1}}\,\alpha_1 = 0{,}125\,\alpha_1\,\frac{P\,l_1^2}{D_1}\,. \tag{53}$$

Hierin ist

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi}\,K(\varepsilon) \tag{54}$$

mit dem Modul des elliptischen Integrals ε. Die Beiwerte α_1 sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Der maximale Bodendruck ergibt sich durch Multiplikation des Biegepfeiles (53) mit der Bodenziffer k.

b) Elastischer Halbraum als Unterlage. Mit den im Abschnitt 2 eingeführten Bezeichnungen sowie den Abkürzungen

$$k_0 = \frac{E_0}{2\,(1-\nu_0^2)}\,, \qquad l_0 = \sqrt[3]{\frac{D}{k_0}}\,, \qquad l_{01} = \sqrt[3]{\frac{D_1}{k_0}} \tag{55}$$

ergibt sich der Wert von $C(\gamma)$ zu $1/(\gamma\,k_0)$ und weiterhin, auf Grund von (49), der Biegepfeil gleich

$$w(0) = \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{d\gamma}{k_0+\gamma^3\,\Phi} = \frac{2\,P\sqrt{3}}{9\,\pi\,k_0^{2/3}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Phi^{1/3}}\,. \tag{56}$$

Indem man den vorstehenden Integranden durch $C(\gamma) = 1/(\gamma\,k_0)$ dividiert, erhält man für die Bodenpressung unter der Einzellast den Ausdruck

$$p(0) = \frac{P\,k_0}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\gamma\,d\gamma}{k_0+\gamma^3\,\Phi} = \frac{2\,P\,k_0^{2/3}\sqrt{3}}{9\,\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Phi^{2/3}}\,. \tag{57}$$

Zwei Fälle mögen nun speziell behandelt werden.

1. Balkenrost mit $D_x = D_y = D_1$, $H = \eta\,D_1$. Die Funktion Φ ist in diesem Falle von der Form (51). Mit $2\varphi = \psi$ erhält man also

$$w(0) = \frac{2\,P\sqrt{3}}{9\,\pi\,k_0^{2/3}\,D_1^{1/3}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt[3]{1-\varepsilon^2\sin^2\psi}} = \frac{P\sqrt{3}}{9\,k_0^{2/3}\,D_1^{1/3}}\,\alpha_2 = 0{,}192\,\alpha_2\,\frac{P\,l_0^2}{D_1}\,, \tag{58}$$

sofern $\varepsilon^2 = (1-\eta)/2$ ist und α_2 den mit 2π multiplizierten Wert des vorstehenden Integrals bezeichnet. Bei kleinen Werten ε^2 berechnet sich dieses und ähnliche Integrale wohl am einfachsten, indem man den Integranden nach Potenzen von $\varepsilon^2\sin^2\psi$ entwickelt und die Reihe gliedweise ausintegriert. Bei größeren Werten ε^2 kommt vor allem die Anwendung der *Simpson*schen Formel in Betracht.

Die Werte α_2 sind in der Tabelle 1 angegeben. Die durch den Verlust der Torsionssteifigkeit bedingte Vergrößerung des Biegepfeiles erweist sich nach diesen Ergebnissen als weniger ausgeprägt als bei der schwimmenden Platte.

Die Größe der maximalen Bodenpressung berechnet sich nach der Gleichung (57) zu

$$p(0) = \frac{2\,P\,k_0^{2/3}\sqrt{3}}{9\,\pi\,D_1^{2/3}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\psi)^{2/3}} = \frac{P\sqrt{3}}{9}\left(\frac{k_0}{D_1}\right)^{2/3}\alpha_3 = 0{,}192\,\alpha_3\,\frac{P}{l_{01}^2}\,, \tag{59}$$

wobei sich α_3 ganz ähnlich ergibt, wie der Beiwert α_2 im Ausdruck (58). Auch die Zahlenwerte für α_3 sind in der Tabelle 1 zu finden.

2. Stahlbetonplatte mit $D_x = D\lambda^{-2}$, $D_y = D\lambda^2$, $H = D$. Aus dem Vergleich von (31) mit (42) erhält man in diesem Falle die Funktion

$$\Phi = D\,(\lambda^{-1}\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi)^2 = D\,\lambda^{-2}\,[1-(1-\lambda^2)\sin^2\varphi]^2\,,$$

und die Formel (56) liefert

$$w(0) = \frac{2\,P\,\lambda^{2/3}\sqrt{3}}{9\,\pi\,k_0^{2/3}\,D^{1/3}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1-(1-\lambda^2)\sin^2\varphi]^{2/3}} = \frac{P\sqrt{3}}{9\,k_0^{2/3}\,D^{1/3}}\,\alpha_4 = 0{,}192\,\alpha_4\,\frac{P\,l_0^2}{D}\,. \tag{60}$$

Der Beiwert α_4 bezeichnet hier den mit $2\,\lambda^{2/3}/\pi$ multiplizierten Wert des betreffenden Integrals, der wiederum identisch ist mit dem Integral der Gleichung (59).

Die zugehörige größte Bodenpressung erhält man ganz ähnlich aus der allgemeinen Formel (57). Es wird

$$p(0) = \frac{2\,P\,k_0^{2/3}\,\lambda^{4/3}\sqrt{3}}{9\,\pi\,D^{2/3}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1-(1-\lambda^2)\sin^1\varphi]^{4/3}} = \frac{P\sqrt{3}}{9}\left(\frac{k_0}{D}\right)^{2/3}\alpha_5 = 0{,}192\,\alpha_5\,\frac{P}{l_0^2}\,, \tag{61}$$

falls der Beiwert α_5 den mit $2\,\lambda^{4/3}/\pi$ vervielfachten Wert des Integrals bedeutet. Auch die Werte α_4 und α_5 finden sich in der Tabelle 1.

Tabelle 1. *Beiwerte α_i zur Berechnung des Biegepfeiles und der Bodenpressung*

Fall: $D_x = D_y = D_1 \quad H = \eta\,D_1$				Fall: $D_x\,D_y = H^2,\ \lambda = (D_y/D_x)^{1/4}$		
η	Bodenziffer-Theorie	Elastischer Halbraum		λ	Elastischer Halbraum	
	α_1	α_2	α_3		α_4	α_5
0,0	1,180	1,115	1,252	—	—	—
0,1	1,155	1,099	1,215	0,1	0,753	1,442
0,2	1,132	1,085	1,181	0,2	0,870	1,253
0,3	1,110	1,072	1,151	0,3	0,925	1,148
0,4	1,091	1,060	1,125	0,4	0,955	1,092
0,5	1,073	1,048	1,100	0,5	0,974	1,053
0,6	1,057	1,037	1,076	0,6	0,986	1,029
0,7	1,041	1,027	1,055	0,7	0,993	1,014
0,8	1,027	1,018	1,036	0,8	0,997	1,006
0,9	1,013	1,009	1,018	0,9	0,999	1,002
1,0	1,000	1,000	1,000	1,0	1,000	1,000

Anmerkung: $\alpha_4(1/\lambda) = \alpha_4(\lambda)$; $\alpha_5(1/\lambda) = \alpha_5(\lambda)$

6. Biegemomente unter der Einzellast. Zur Berechnung der Biegemomente soll die Einzellast P von Anfang an auf eine Kreisfläche von einem Halbmesser c verteilt werden. Liegt das Kreiszentrum im Koordinatenanfang, so liefert die in Polarkoordinaten r, ϑ statt in den Koordinaten ξ, η geschriebene Formel (13)

$$Q(\gamma,\varphi) = \frac{1}{4\,\pi^2}\,\frac{P}{\pi\,c^2}\int_0^c r\,dr\int_0^{2\pi}\cos(\alpha\,r\cos\vartheta)\cos(\beta\,r\sin\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= \frac{P}{4\,\pi^3\,c^2}\int_0^c 2\,\pi\,J_0(\gamma\,r)\,r\,dr = \frac{P}{2\,\pi^2\,\gamma\,c}\,J_1(\gamma\,c)\,. \tag{62}$$

Die weitere Untersuchung möge auf den Fall eines „schwimmenden" Balkenrostes beschränkt werden. Nimmt man nach wie vor $D_x = D_y = D_1$ an, so genügt es, zur Angabe der Biegemomente in der Mitte des Lastkreises den Wert

$$\Delta w(0) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=y=0} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(\alpha,\beta)\,C(\alpha,\beta)\,\gamma^2}{1+C(\alpha,\beta)\,N(\alpha,\beta)}\,d\alpha\,d\beta\,, \tag{63}$$

der sich aus (12) ableiten läßt, zu wissen. Geht man wiederum zu Polarkoordinaten über, so kommt mit Rücksicht auf (62) und auf die Größen $C = 1/k$ und $N = \gamma^4\,\Phi$

$$\Delta w(0) = -\frac{P}{2\,\pi^2\,c}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty}\frac{\gamma^2\,J_1(\gamma\,c)}{k+\gamma^4\,\Phi}\,d\gamma\,. \tag{64}$$

Setzt man weiterhin zur Abkürzung

$$\mu^4 = \frac{k}{\Phi}\,, \tag{65}$$

so ergibt sich

$$\Delta w(0) = -\frac{P}{2\,\pi^2\,c}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\Phi}\,I \tag{66}$$

mit

$$I = \int_0^\infty \frac{\gamma^2\,J_1(\gamma\,c)}{\mu^4+\gamma^4}\,d\gamma = \frac{1}{2\,\mu^2\,i}\left[\int_0^\infty \frac{\gamma^2\,J_1(\gamma\,c)\,d\gamma}{\gamma^2+(\mu\sqrt{-i})^2} - \int_0^\infty \frac{\gamma^2\,J_1(\gamma\,c)\,d\gamma}{\gamma^2+(\mu\sqrt{i})^2}\right].$$

Nun gilt für $-1 < \Re(\nu) < 2\,m+\frac{3}{2}$, $\Re(k) > 0$ allgemein[1]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}\,J_\nu(a\,x)}{(x^2+k^2)^{m+1}}\,dx = \frac{a^m\,k^{\nu-m}\,K_{\nu-m}(a\,k)}{2^m\,m!}\,.$$

In unserem Falle ist anzunehmen

$$m=0\,,\qquad \nu=1\,,\qquad x=\gamma\,,\qquad a=c\,,\qquad k=\mu\sqrt{-i}\quad\text{bzw.}\quad k=\mu\sqrt{i}$$

mit dem Ergebnis

$$I = \frac{1}{2\,\mu^2}\left[-\sqrt{i}\,K_1(c\,\mu\sqrt{-i}) + \sqrt{i}\,K_1(c\,\mu\sqrt{i})\right]. \tag{67}$$

Die *Macdonald*schen Funktionen $K_1(\cdots)$ lassen sich ihrerseits durch die *Thomson*schen Funktionen ersetzen[2]. Man erhält nach einigen Vereinfachungen

$$I = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\,\mathrm{kei}\,(c\,\mu)}{d(c\,\mu)} \equiv \frac{1}{\mu}\,\mathrm{kei}'(c\,\mu)\,. \tag{68}$$

Nun ist außerdem

$$\frac{\mathrm{kei}'(c\,\mu)}{c\,\mu} \approx -\frac{1}{2}\ln(c\,\mu) + 0{,}308\,.$$

Die Formel (66) liefert somit

$$\Delta w(0) = -\frac{P}{4\,\pi^2}\int_0^{2\pi}[-\ln(c\,\mu)+0{,}616]\,\frac{d\varphi}{\Phi}\,. \tag{69}$$

Für den Balkenrost gilt hier nach Gleichung (51)

$$\Phi = D_1\,(1-\varepsilon^2\sin^2 2\,\varphi)\,.$$

Man kommt also mit der bereits früher benutzten Bezeichnung $l_1 = \sqrt[4]{D_1/k}$ zu einem Sonderwert für μ

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{k}{\Phi}} = \frac{1}{l_1}\,(1-\varepsilon^2\sin^2 2\,\varphi)^{-1/4}.$$

Der Ausdruck (69) läßt sich hiernach wie folgt umschreiben:

$$\Delta w(0) = -\frac{P}{\pi^2\,D_1}\int_0^{\pi/2}\left[\ln\frac{l_1}{c}+0{,}616+\frac{1}{4}\ln(1-\varepsilon^2\sin^2\psi)\right]\frac{d\psi}{1-\varepsilon^2\sin^2\psi}\,. \tag{70}$$

Nun ist in Anbetracht von $\varepsilon^2 = (1-\eta)/2$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{1-\varepsilon^2\sin^2\psi} = \frac{\pi}{\sqrt{2\,(1+\eta)}}\,.$$

Es gilt also im Endergebnis

$$\Delta w(0) = -\frac{P}{\pi\,D_1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\,(1+\eta)}}\left(\ln\frac{l_1}{c}+0{,}616\right)+\frac{1}{4}\,L\right],$$

[1] *G. N. Watson*, Theory of Bessel Functions, S. 425.
[2] Siehe z. B. *A. Erdélyi*, Tables of Integral Transforms, Bd. 1, S. 371, New York 1954.

worin

$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 - \varepsilon^2 \sin^2\psi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\psi}\, d\psi$$

sein soll.

Die Biegemomente $m_x(0) = m_y(0) = -[D_1 (1 + \nu)\, \Delta w(0)]/2$ drücken sich somit aus in der Form

$$m_x(0) = m_y(0) = \frac{P(1+\nu)}{4\pi}\left(\alpha \ln \frac{l_1}{\varepsilon} + \beta\right), \tag{71}$$

sofern man von den Bezeichnungen

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \qquad \text{und} \qquad \beta = 0{,}616\,\alpha + \frac{1}{2} L$$

Gebrauch macht. Die Beiwerte α und β sind in der Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2
Beiwerte α und β zur Berechnung der Biegemomente

η	α	β	η	α	β
0,0	1,414	0,453	0,5	1,155	0,576
0,1	1,348	0,490	0,6	1,118	0,588
0,2	1,291	0,520	0,7	1,085	0,598
0,3	1,240	0,543	0,8	1,054	0,606
0,4	1,195	0,561	0,9	1,026	0,612
0,5	1,155	0,576	1,0	1,000	0,616

Auf die Berechnung der Biegemomente im Falle des elastischen Halbraumes als Plattenunterlage gehen wir nicht weiter ein. Es möge indes die folgende diesbezügliche Bemerkung gemacht werden. Hat man es mit einer isotropen Platte zu tun, so erweisen sich die zugehörigen Ausdrücke für die Biegemomente unter einer stark konzentrierten Einzellast in beiden Fällen, das heißt also bei der Anwendung der Bodenziffertheorie und beim elastischen Halbraum als Unterlage, als formal identisch[1]. Nur ist als Bezugslänge im ersten Fall

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}$$

und im zweiten

$$l_0 = \sqrt[3]{\frac{D}{k_0}}$$

mit $k_0 = E_0/(2 - 2\nu^2)$ einzuführen.

Höchstwahrscheinlich ließen sich auch die Formeln (39) und (71) auf den Fall des elastischen Halbraumes mit einer für technische Zwecke ausreichender Genauigkeit anwenden. Nur wäre, falls man so vorgeht, in der Gleichung (39) mit $l_0 = \sqrt[3]{D/k_0}$ statt mit $l = \sqrt[4]{D/k}$ und in der Gleichung (71) mit $l_{01} = \sqrt[3]{D_1/k_0}$ statt mit $l_1 = \sqrt[4]{D_1/k}$ zu rechnen.

(Eingegangen am 14. April 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. S. *Woinowsky-Krieger*, Quebec (Canada), Université Laval Faculté des Sciences Boulevard l'Entente.

[1] S. *Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 146.

Strömungsverhältnisse in einem Diffusor mit vorgeschaltetem Krümmer*

Von K. H. Pohl

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit soll zur Kenntnis der noch weitgehend unbekannten Strömungsverhältnisse in einem Diffusor mit vorgeschaltetem Krümmer beitragen. Da eine Lösung dieses Problems durch Integration der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen bei dem augenblicklichen Stand der Theorie aussichtslos ist, steht das Experiment ausgesprochen im Vordergrund. Als Hauptaufgabe ging es dabei um die Feststellung der auftretenden Verluste und die Aufnahme von Geschwindigkeitsprofilen.

Um den Umfang der Versuche zu begrenzen, wurden für alle Messungen die Diffusor- und Krümmermaße bis auf den Umlenkungswinkel des Krümmers beibehalten. So konnte also nur eine grundsätzliche und keine umfassende Klärung der Strömungsvorgänge erreicht werden; denn dazu wäre es nötig gewesen, außer dem Umlenkungswinkel des Krümmers noch andere Parameter, z. B. das Seitenverhältnis des Kanalquerschnitts, den Erweiterungswinkel und das Querschnittsverhältnis des Diffusors und vor allen Dingen das Verhältnis des mittleren Krümmungsradius zum hydraulischen Radius des Krümmers zu verändern. Alle Versuche wurden mit Luft ausgeführt.

2. Die Versuchseinrichtung und die Durchführung der Versuche. Der Versuchskanal von quadratischem Querschnitt ist an die Saugseite eines Radialgebläses angeschlossen, wie dies Abb. 1 zeigt. Die Strömung wurde in den Querschnitten *II*, *III*, *IV* und *VII* ausführlich mit Meßsonden untersucht. In den Querschnitten *I*, *V* und *VI* wurden nur Wanddrücke gemessen. Die für diese Querschnitte geltenden Größen sind durch die Indizes 1 bis 7 gekennzeichnet.

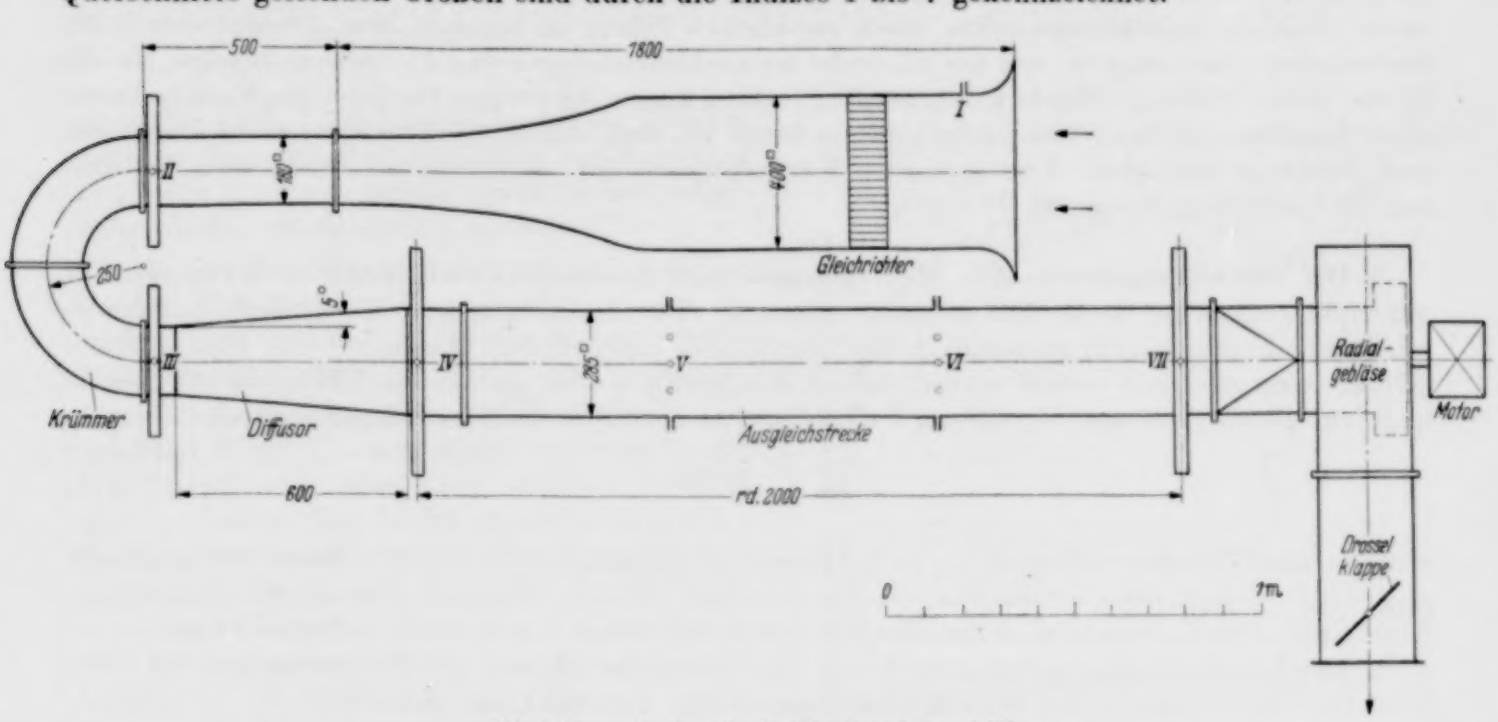


Abb. 1. Versuchsanlage (in der Kanalanordnung A III).

Die Luft tritt durch eine Einlaufdüse mit ebenfalls quadratischem Querschnitt in den Kanal ein. Ein Gleichrichter und eine auf diesen folgende Kontraktion der Einlaufstrecke im Verhältnis 5:1 sorgen für die Beseitigung der Einlaufstörungen.

Die folgende gekrümmte Kanalstrecke besteht wahlweise aus einem oder zwei Krümmerstücken mit einem Umlenkungswinkel δ von je 90°, so daß mit diesen beiden Teilen eine Umlenkung um 90° oder 180° möglich ist. Die Krümmer haben eine Querschnittsfläche von $0{,}18 \times 0{,}18$ m²; das Verhältnis des mittleren Krümmungsradius r_m zum hydraulischen Radius r_H ist $r_m/r_H = 5{,}55$.

* Gekürzte Fassung der vom Verfasser im Jahre 1954 im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen durchgeführten Diplomarbeit (Ref.: Prof. Dr. *Albert Betz*).

Der unmittelbar an den Krümmer angeschlossene Diffusor hat einen halben Erweiterungswinkel von 5° und ein Flächenverhältnis von Ein- und Austrittsquerschnitt von $F_3/F_4 = 0{,}4$, also eine Länge von 0,6 m.

Das dem Diffusor folgende Kanalstück ist 2 m lang und hat eine Querschnittsfläche von $0{,}285 \times 0{,}285$ m². Diese „Ausgleichsstrecke" soll zur Vergleichmäßigung des sich am Ende des Diffusors ausbildenden Geschwindigkeitsprofils dienen und so eine teilweise Umsetzung von kinetischer Energie in Druck ermöglichen.

Nach Verlassen dieser Ausgleichsstrecke strömt die Luft durch das von einem Drehstrommotor angetriebene Gebläse. Der Durchfluß konnte mit einer Drosselklappe am Ventilator geregelt werden. Bis auf die Einlaufstrecke, die ganz in Blech ausgeführt ist, bestehen die Seitenwände der quadratischen Versuchsstrecke aus Blech, Boden und Deckel aus Sperrholz. Der Diffusor hat hölzerne Seitenwände, Deckel und Boden sind aus Glas. So kann man die Strömung im Diffusor qualitativ mittels Faden oder Rauch verfolgen.

Durch Veränderung des Umlenkungswinkels δ des Krümmers ergeben sich die folgenden drei Kanalanordnungen A, an denen die Messungen vorgenommen wurden:

A I : $\delta = 0°$: der gerade Kanal mit Diffusor,
A II : $\delta = 90°$: Kanal mit einem 90°-Krümmer vor dem Diffusor,
A III: $\delta = 180°$: Kanal mit einem 180°-Krümmer vor dem Diffusor.

Die Durchführung der Versuche erforderte die Messung des Staudruckes $q = \varrho/2\, v^2$, des Gesamtdruckes g und des statistischen Druckes p in den Querschnitten *II*, *III*, *IV* und *VII*, dabei konnte natürlich je einer der drei Drücke aus den beiden anderen nach der Definitionsgleichung $p + q = g$ berechnet werden. Außerdem wurden an sämtlichen Meßstellen *I* bis *VII* die statischen Drücke an der Wand gemessen. In allen drei Kanalanordnungen A I, A II und A III wurde die Strömung in Abhängigkeit von drei *Re*-Zahlen untersucht.

Die Messungen wurden mit einem unter 0° gegen die Kanalachse eingestellten Staugerät ausgeführt. Das ist möglich unter der Annahme, daß die Strömungsrichtung nur wenig von der Kanalachse abweicht, so daß man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, den Absolutwert v der Strömungsgeschwindigkeit, den das Staurohr bis zu Abweichungen von 15° richtig anzeigt, für die in die Axial-Richtung fallende Komponente v_x setzen kann. An einigen Punkten des Kanals wurde diese Annahme mit einer Vier-Loch-Sonde nachgeprüft, und, solange die Strömung nicht abgerissen war, bestätigt gefunden. Trat irgendwo Rückströmung auf, so wurde der Staudruck mit dem um 180° gedrehten Staugerät ermittelt.

3. Die Versuchsergebnisse. Alle Meßergebnisse und die aus ihnen abgeleiteten Werte wurden mit einer geeigneten Größe dimensionslos gemacht. Die Darstellung hat den Vorteil, daß die so erhaltenen Ergebnisse für geometrisch ähnliche Kanäle und beliebige inkompressible Flüssigkeiten gelten, wenn man nur darauf achtet, daß in den beiden zu vergleichenden Fällen die *Re*-Zahlen ungefähr gleich groß sind. In diesem Fall definiert man die *Re*-Zahl zweckmäßig durch

$$Re = 4\,\frac{\bar{v}_2\, r_{2H}}{\nu} \tag{1}$$

mit ν = kinematischer Zähigkeit, $\bar{v}_2$ = mittlerer Geschwindigkeit im engsten Querschnitt *II* und $r_{2H} = a_2/4$ = hydraulischer Radius des Querschnitts *II*. Im folgenden werden die dimensionslosen Größen im Unterschied zu den dimensionsbehafteten mit einem Strich gekennzeichnet.

a) Die Geschwindigkeitsverteilung. Die Geschwindigkeiten wurden jeweils mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_k$ des betreffenden Querschnitts dimensionslos gemacht:

$$v_k'(x'\,y') = \frac{v_k(x'\,y')}{\bar{v}_k}\,. \tag{2}$$

In den Querschnitten *III* und *IV* traten zum Teil zeitlich stark schwankende Drücke auf. An solchen Stellen liefert die Messung der Strömungsgeschwindigkeit mit dem Staugerät unvermeidlich zu hohe Geschwindigkeitswerte; denn man mißt mit dem Staugerät über eine genügend lange Zeit T den Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrates $\overline{v^2}$. Bekanntlich ist aber, wenn man $v = \bar{v} + \tilde{v}(t)$ setzt,

$$\overline{v^2} = \bar{v}^2 + \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{v}^2\, dt > \bar{v}^2\,. \tag{3}$$

Da im Querschnitt *II* $\tilde{v}(t) \approx 0$ ist, ist die dort aus $\overline{v^2}$ ermittelte mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}_2$ derjenige Wert, welcher der wirklichen mittleren Durchflußgeschwindigkeit am nächsten kommt. Mit diesem ergeben sich aber die mittleren Durchflußgeschwindigkeiten in den anderen Querschnitten auf Grund des überall gleichen Volumenstromes $\dot{V}$. Um die langwierige Ermittlung von $\overline{v}_2$ bei jedem Versuch zu ersparen, wurde der Volumenstrom $\dot{V}$ durch Messung des Wanddruckes p_1 unmittelbar hinter dem Einlauftrichter unter Berücksichtigung des Düsenkoeffizienten bestimmt.

Die Verteilung der Geschwindigkeiten in den einzelnen Meßquerschnitten — dargestellt durch die Isotachen — bei den Strömungen durch die Kanäle A I, A II und A III und der *Re*-Zahl $5 \cdot 10^5$

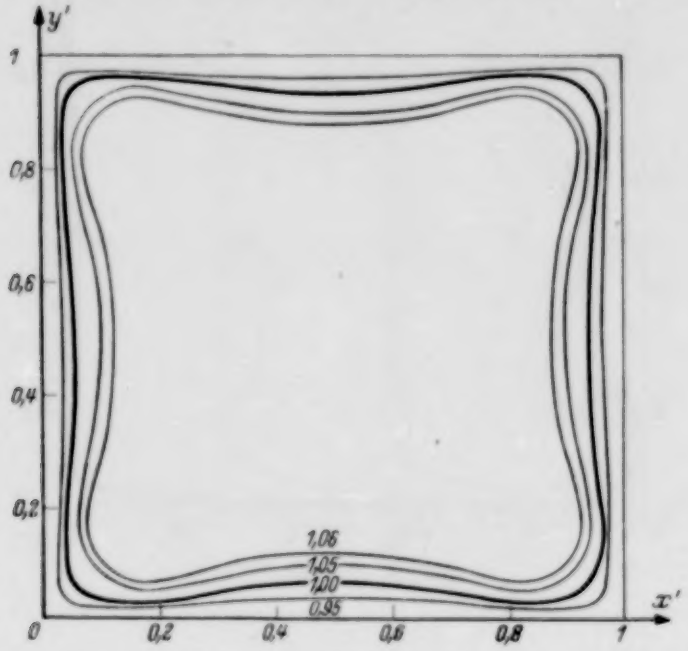


Abb. 2. Meßstelle *III*.

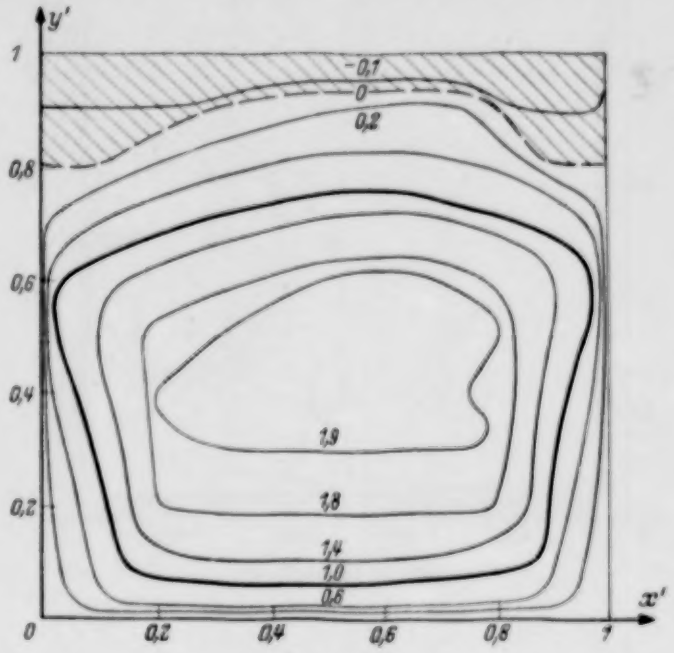


Abb. 3. Meßstelle *IV*.

ist in den Abb. 2 bis 12 wiedergegeben. Die Ergebnisse bei anderen *Re*-Zahlen unterscheiden sich nicht stark von den dargestellten und zeigen daher nichts grundsätzlich anderes.

Alle Querschnitte sind in Strömungsrichtung gesehen. Die Krümmerinnenwand liegt links, die Außenwand rechts. An Stelle der wirklichen Koordinaten x und y sind ihre mit der jeweiligen Kanalbreite (= Kanalhöhe) a_k dimensionslos gemachten Werte $x' = x/a_k$ und $y' = y/a_k$ verwandt. Die Querschnitte erscheinen dadurch stets in gleicher Größe. Die Zahlen an den Isotachen bedeuten die dimensionslosen Geschwindigkeiten $v'_k(x', y')$ nach (2). Die Erstreckung der Kanalachse vom Eintrittsquerschnitt *II* in den Krümmer in Strömungsrichtung ist als z-Achse gewählt. Sie ist mit der Kanalbreite im engsten Querschnitt *II* dimensionslos gemacht: $z' = z/a_2$. An Hand dieser Abbildungen kann man folgendes erkennen:

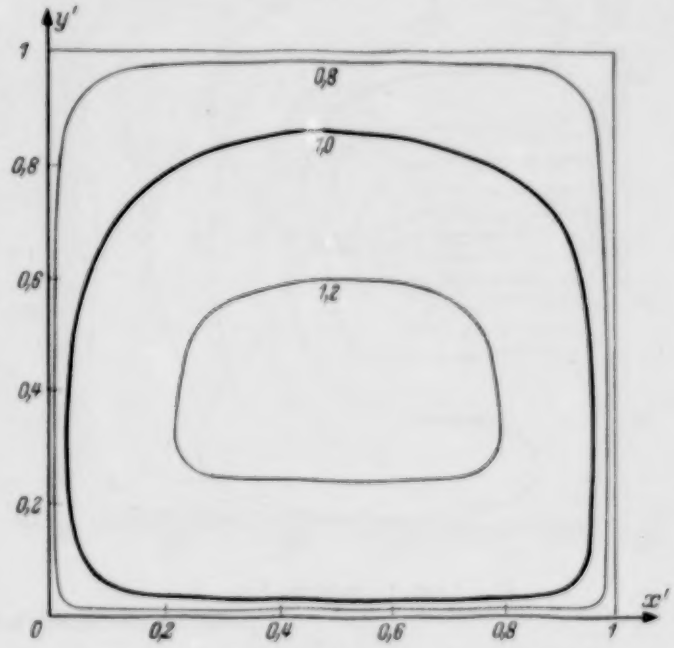


Abb. 4. Meßstelle *VII*.

Abb. 2 bis 4. Isotachen bei Kanalanordnung A I.

1. Kanalanordnung A I. Die Abb. 2 bis 4 zeigen die schon seit langem grundsätzlich bekannten Formen der Geschwindigkeitsverteilung im geraden Kanal mit Diffusor. In Abb. 2 ist deutlich die in jedem geraden Kanal von nicht kreisförmigem Querschnitt bei turbulenter Strömung auftretende Sekundärströmung zweiter Art, die eine Ausbuchtung der Isotachen in die Kanalecken bewirkt, zu erkennen.

Abb. 3 zeigt folgendes: Eine Betrachtung der *Bernoulli*schen Gleichung lehrt, daß die am Diffusor auftretende Verzögerung der Strömung eine Zuspitzung des Geschwindigkeitsprofiles nach der Kanalmitte zu bewirkt (vgl. Abb. 2 und 3). Wie bekannt, darf der Diffusor, wenn die Strömung

nicht merklich abreißen soll, im allgemeinen keinen größeren Gesamterweiterungswinkel als 8° bis 10° haben. Der vorliegende Versuchsdiffusor mit einem Erweiterungswinkel von 10° versetzt die Strömung gerade in den „kritischen Ablösungszustand". Schon eine geringe Störung der Geschwindigkeitsverteilung kann Ablösung hervorrufen. Diese wird hier durch eine kaum merkliche Unsymmetrie in der Form des Diffusors verursacht. Die Strömung reißt an der Oberseite des Dif-

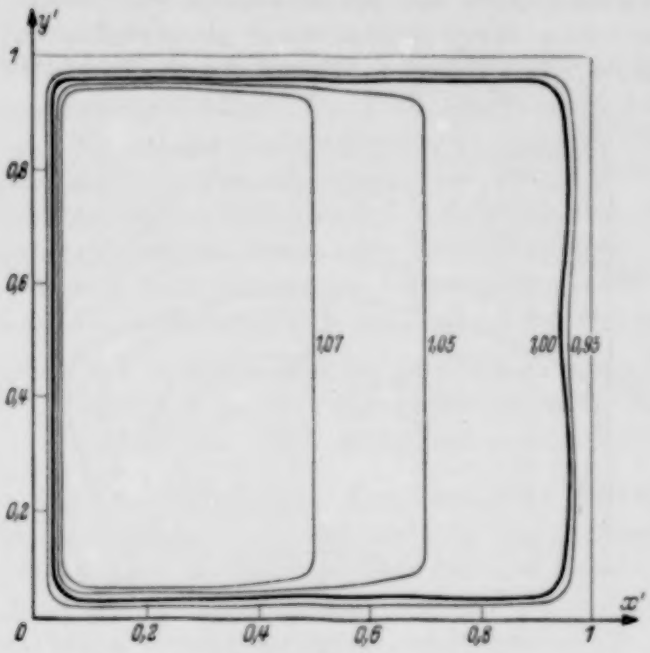


Abb. 5. Meßstelle *II*.

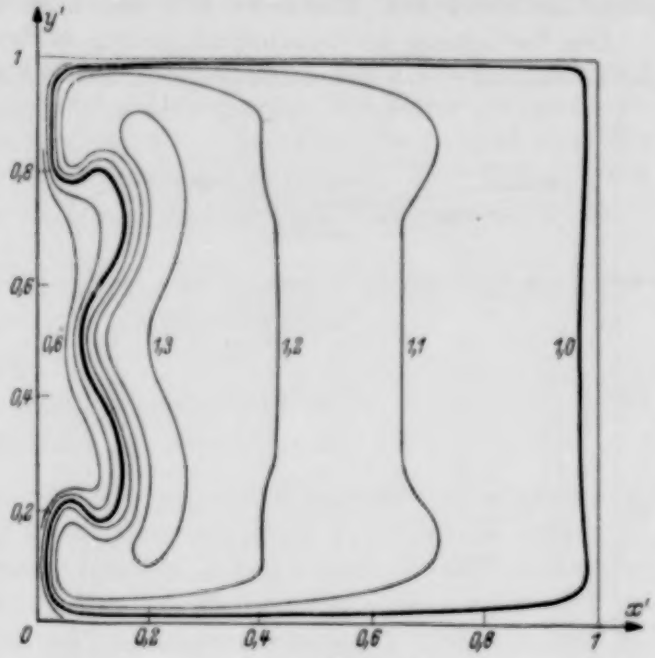


Abb. 6. Meßstelle *III*.

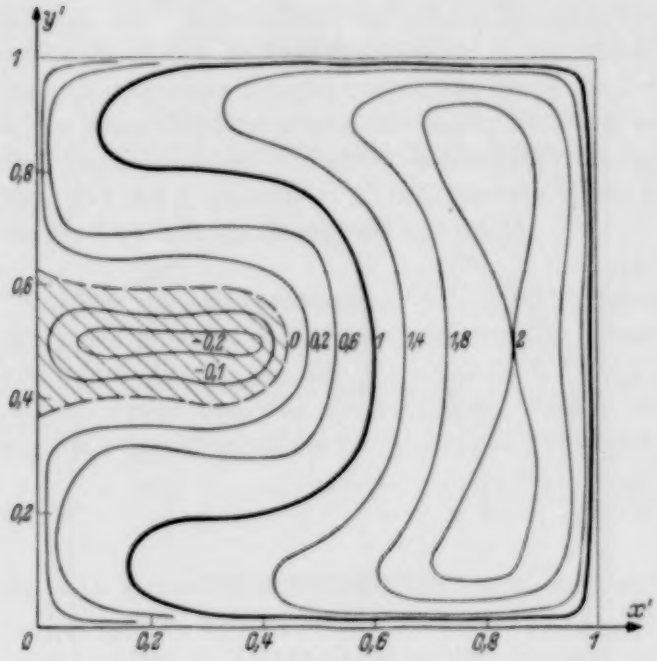


Abb. 7. Meßstelle *IV*.

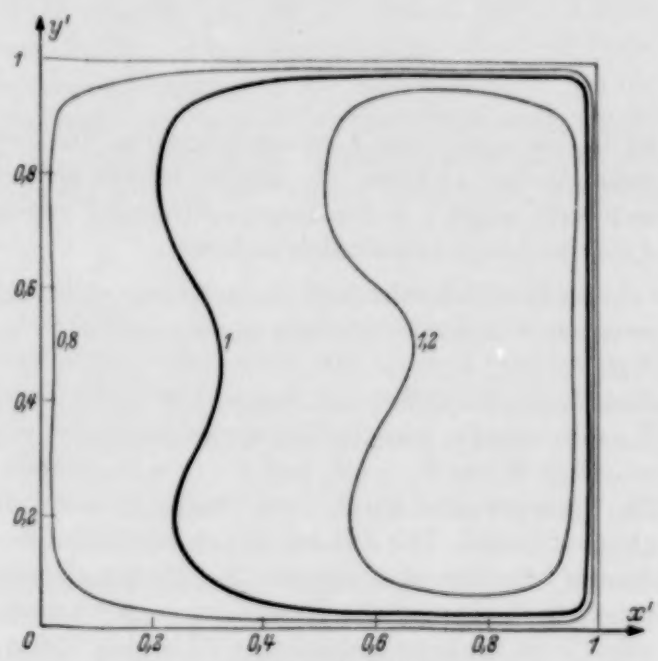


Abb. 8. Meßstelle *VII*.

Abb. 5 bis 8. Isotachen bei Kanalanordnung A II.

fusors ab, und es tritt Rückströmung ein (schraffiertes Gebiet in Abb. 3). Die vorher sehr gute Symmetrie zur horizontalen Mittelebene $y' = 0{,}5$ ist gestört.

Am Ende der Ausgleichstrecke (Abb. 4) haben sich die starken Geschwindigkeitsunterschiede im Austrittsquerschnitt des Diffusors wieder einigermaßen ausgeglichen. Die Symmetrie des Profils zur Ebene $y' = 0{,}5$ ist aber noch lange nicht wieder erreicht.

2. *Kanalanordnung* A II. Dagegen zeigen die Abb. 5 bis 12 fast ausnahmslos recht gute Symmetrie zur Ebene $y' = 0{,}5$ und gar keine Symmetrie mehr zur vertikalen Mittelebene $x' = 0{,}5$. Das ist der Einfluß des Krümmers und der in ihm auftretenden Sekundärströmung. Schon vor dem Eintritt in den Krümmer (Abb. 5) wird die Strömung durch ihn in der Art beeinflußt, daß sie

sich auf die Geschwindigkeitsverteilung, die für die Bewegung einer idealen Flüssigkeit im Krümmer zu erwarten ist ($v\,r$ = konst.), einstellt. Eine Verzögerung der Strömung an der rechten Seite des Kanals ist deutlich zu erkennen. Abb. 6 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung im Austrittsquerschnitt des Krümmers, die durch Überlagerung der Hauptbewegung parallel zur Kanalachse und der Sekundärströmung entstanden ist. Rückströmung an der Innenwandung des Krümmers

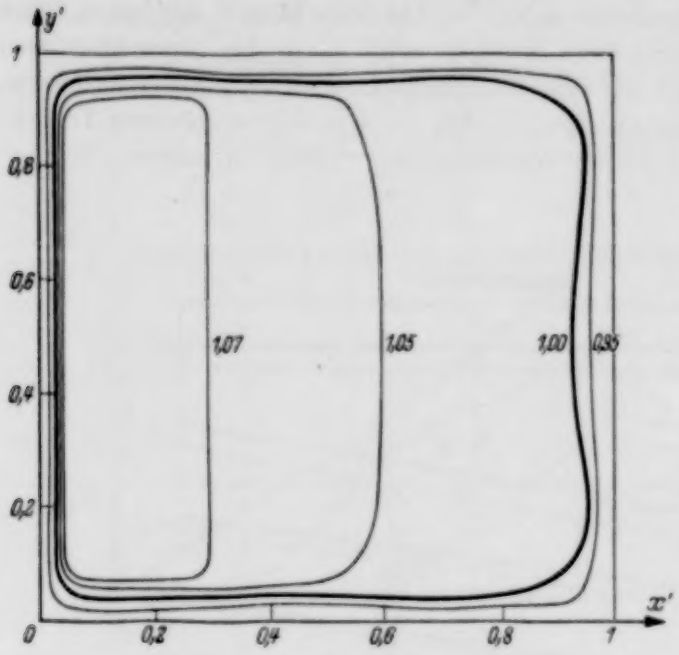


Abb. 9. Meßstelle *II*.

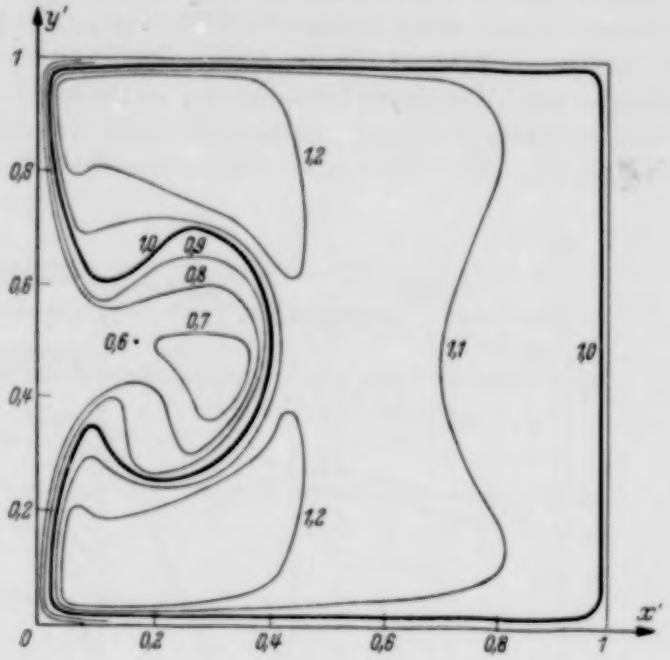


Abb. 10. Meßstelle *III*.

Abb. 11. Meßstelle *IV*.

Abb. 12. Meßstelle *VII*.

Abb. 9 bis 12. Isotachen bei Kanalanordnung A III.

wurde dort noch nicht gemessen. Erst im Diffusor ist die kinetische Energie der an der linken Wand fließenden Flüssigkeitsteilchen so klein geworden, daß die Strömung den dort bestehenden Druckanstieg nicht mehr überwinden kann und zurückfließt (Abb. 7). Das Totwassergebiet, das bei der Anordnung A I an der Oberseite des Diffusors entstanden war, kann sich hier unter dem Einfluß der Sekundärströmung nicht ausbilden.

Abb. 8 zeigt dann, entsprechend wie bei der Anordnung A I, wieder einen Ausgleich der starken Geschwindigkeitsunterschiede im Vergleich zu Abb. 7.

Auf die Unterschiede der Kanalanordnung A III (Abb. 9 bis 12) gegenüber der Anordnung A II soll im Abschnitt d) (Deutung der Versuchsergebnisse) eingegangen werden.

b) Der statische Druck p. Der Druckanstieg im Diffusor ist wegen der unvermeidlichen Verluste immer kleiner als er sich nach der *Bernoulli*schen Gleichung für eine reibungslose Flüssigkeit ergibt. Ist der Erweiterungswinkel des Diffusors so groß, daß Ablösung der Strömung eintritt, so liegt der Gewinn an statischem Druck weit unter dem nach *Bernoulli* errechneten. In der dem Diffusor folgenden Ausgleichstrecke erfolgt aber durch eine Vergleichmäßigung des Geschwindigkeitsprofils ein zusätzlicher statischer Druckanstieg. So zeigt die Anordnung Diffusor–Ausgleichstrecke wieder ein günstigeres Bild. Ist $\bar{p}_k$ der gemessene mittlere statische Druck im Querschnitt k und $\bar{p}'_k = \bar{p}_k/(\varrho/2)\,\bar{v}_2^2$ sein dimensionsloser Beiwert, dann ist $\Delta p'_k = p''^{\prime}_k - \bar{p}'_k$ der gegenüber dem idealen nach *Bernoulli* berechneten statischen Druck $p''^{\prime}_k$ bis zum Querschnitt k aufgetretene dimensionslose Druckverlust. Demnach stellt die Differenz $\Delta p'_{43} = \Delta p'_4 - \Delta p'_3$ den statischen Druckverlust gegenüber dem nach der *Bernoulli*schen Gleichung errechneten im Diffusor allein dar.

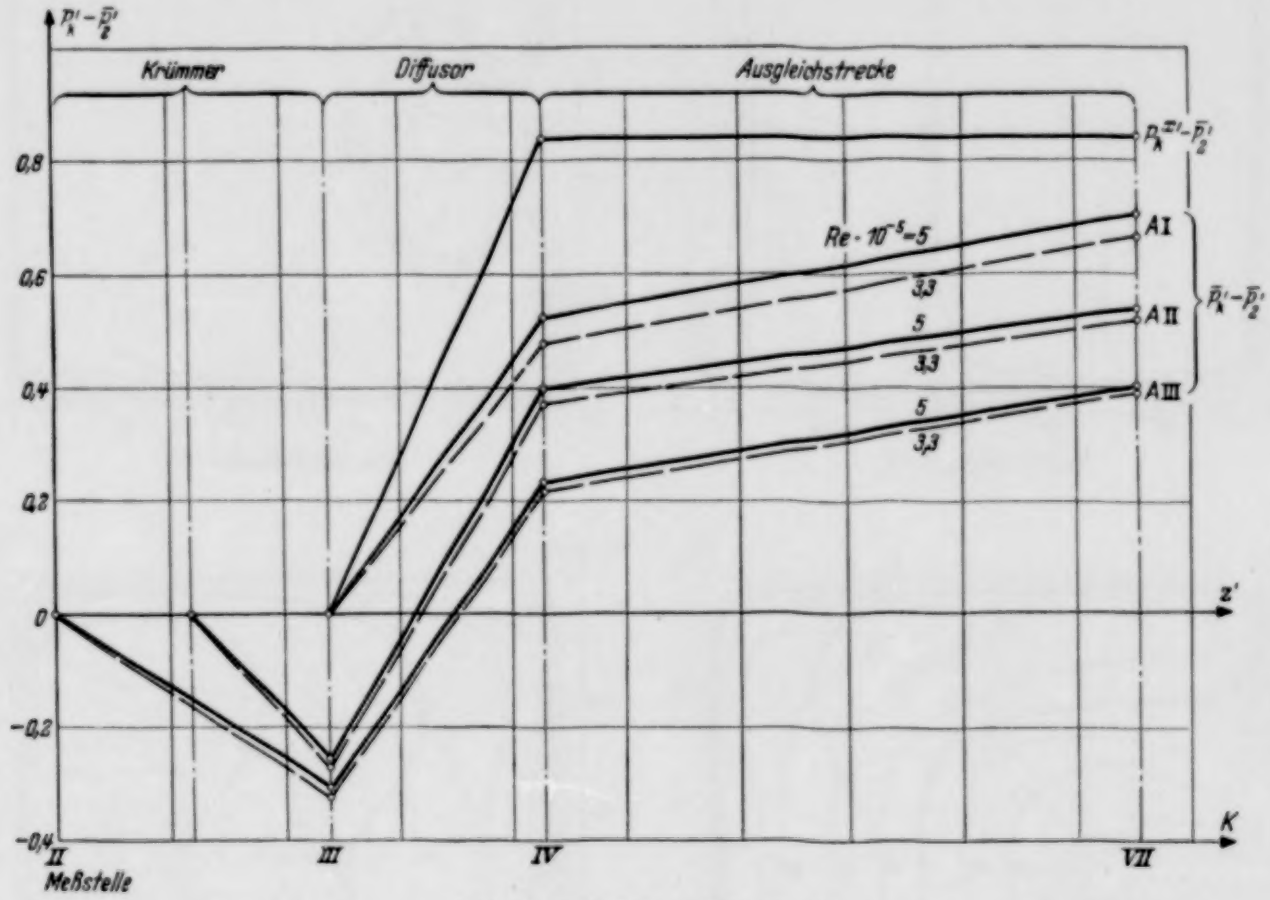


Abb. 13. Verlauf der statischen Drücke.

In den Abb. 13, 14 und 15 sind die Druckdifferenzen $\bar{p}'_k - \bar{p}'_2$, $\Delta p'_k$ und $\Delta p'_{43}$ graphisch dargestellt. (Da der Versuchskanal nur vier Meßquerschnitte hat, war die Feststellung des genauen Kurvenverlaufes nicht möglich. Die in diesen Abbildungen gewählte Darstellungsart der Kurven durch gerade Linienstücke wird also dem wahren Kurvenverlauf nur annähernd entsprechen.

c) Der Energiestrom. Ähnlich wie die Geschwindigkeitsverteilung kann man auch in jedem Querschnitt die Verteilung der durchfließenden Gesamtenergie auftragen. Ist $g = p + (\varrho/2)\,v^2$ der Gesamtdruck, so ist die durch ein Flächenelement df fließende Gesamtenergie

$$dE_k = g_k\, v_k\, df \tag{4}$$

und mit den dimensionslosen Werten $g'_k = g_k/(\varrho/2)\,\bar{v}_2^2$, $v'_k = v_k/\bar{v}_k$ und $df' = df/F_k$ ihr dimensionsloser Wert

$$dE'_k = \frac{dE_k}{(\varrho/2)\,\bar{v}_2^3\,F_2} = g'_k\, v'_k\, df' \,. \tag{5}$$

Die sich hierbei ergebenden Kurven sehen natürlich qualitativ ganz ähnlich aus wie die Isotachen. Durch Integration über den ganzen Querschnitt erhält man dann den durch diesen Querschnitt fließenden Energiestrom. Er nimmt natürlich in jeder Strecke um den in dieser Strecke auftreten-

den Energieverlust ab. In Abb. 15 ist der Verlauf dieser Energieverluste ähnlich wie der der Druckverluste in Abb. 14 dargestellt, und gibt eine gute Übersicht über die Verluste in den einzelnen Strecken.

d) Deutung der Versuchsergebnisse. Aus Abb. 15 ersieht man, daß die Verluste an Gesamtenergie um so größer werden, je stärker die Ablenkung durch den Krümmer ist. Dies war ja

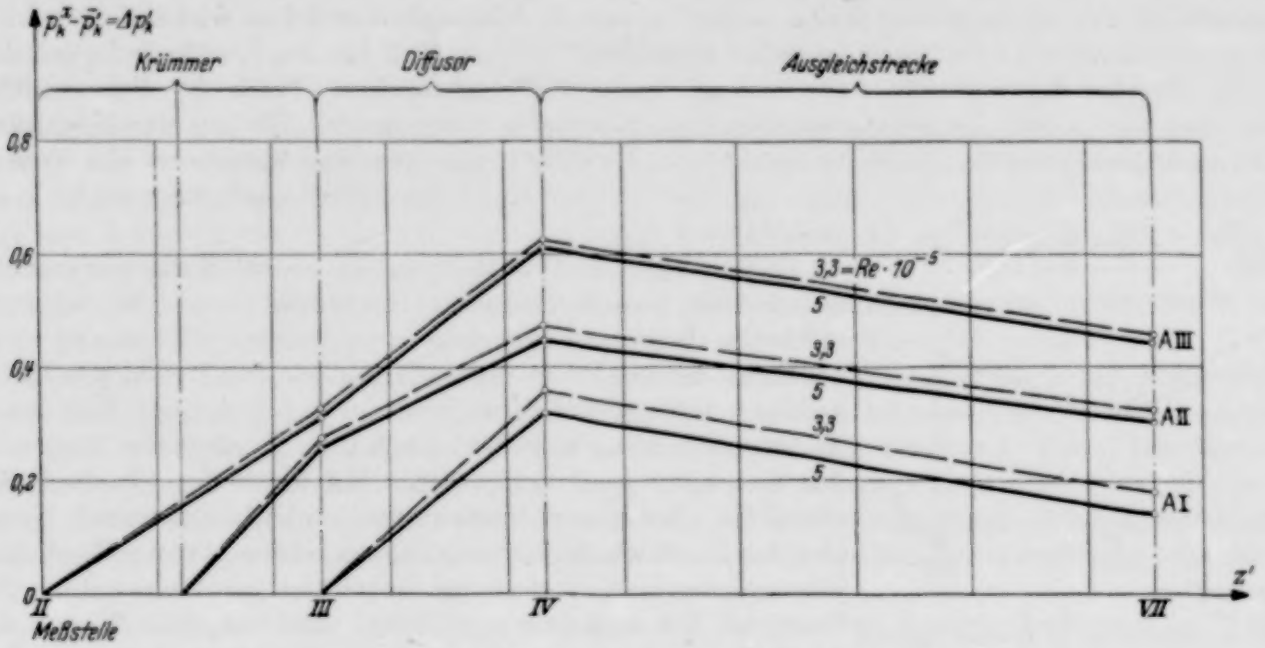


Abb. 14. Verlauf der Druckverluste.

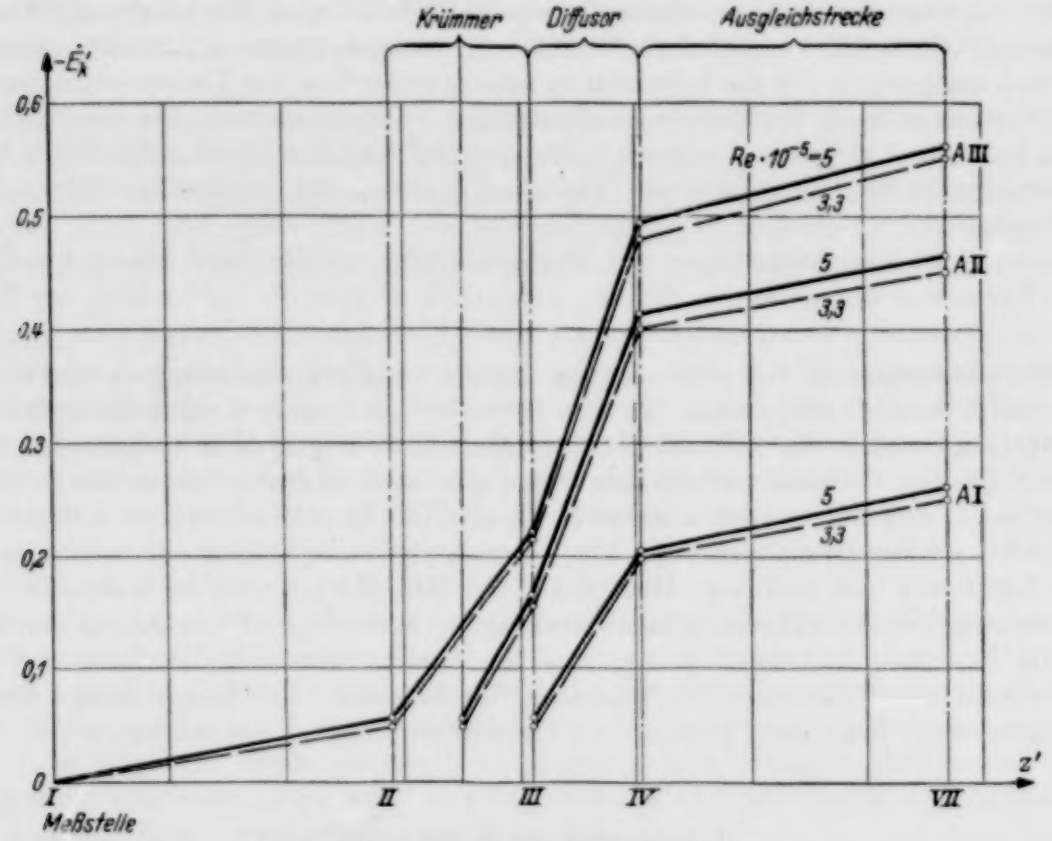


Abb. 15. Verlauf der Energieverluste.

auch zu erwarten. Aber aus einem Vergleich der Abb. 14 und 15 zeigt sich, daß die Verteilung der Gesamtenergie auf Druck- und kinetische Energie bei den verschiedenen Anordnungen doch recht verschieden ist. Da andererseits die Verwertung der kinetischen Energie nur beschränkt möglich ist, interessiert auch der Anteil der Druckenergie allein, da dieser auf alle Fälle verwertbar ist. Hierbei fällt auf, daß der Druckverlust im Diffusor durch den davorliegenden Krümmer nicht vergrößert, sondern verringert wurde, insbesondere bei Anordnung A II. Man ersieht dies besonders

deutlich aus der Darstellung in Abb. 16, in der die Druckverluste $\Delta p'_{43}$ gesondert dargestellt sind. Man kann diese Beobachtung durch folgende Überlegung erklären:

Auf einen Flüssigkeitsstrom in einem gekrümmten Kanal wirken Zentrifugalkräfte ein, die eine Strömung senkrecht zur Kanalachse verursachen. Diese sogenannte Sekundärströmung bildet sich als Doppelwirbel aus. Die resultierenden Stromlinien sind also zwei gegensinnig laufende Spiralen. Ist v die Geschwindigkeit parallel zur Kanalachse und r der Krümmungsradius des Krümmers an der betrachteten Stelle, so ist die auf ein Flüssigkeitsteilchen wirkende Zentrifugalkraft proportional v^2/r. Daher ist es sicher berechtigt, v^2/r als Maß für den Geschwindigkeitsbetrag oder die ‚Stärke' der Sekundärströmung an dieser Stelle anzusehen. Nach der Potentialtheorie erhält man die Geschwindigkeitsverteilung im Krümmer $v = \text{const}/r$. Die aus der Kontinuitätsgleichung folgende mittlere Geschwindigkeit sei $\bar{v}$. Bildet man nun den Mittelwert v^2/r über einen Kanalquerschnitt für die beiden Geschwindigkeitsprofile v und $\bar{v}$, so ist $\overline{v^2}/r > \bar{v}^2/r$.

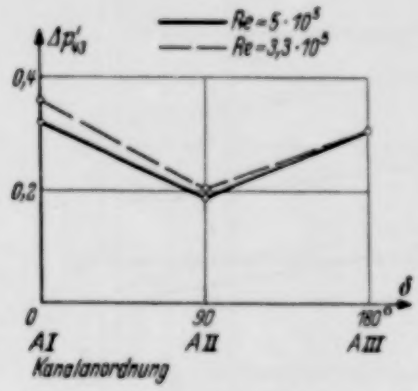


Abb. 16. Druckverlust im Diffusor $\Delta p'_{43}$

Das in einer Potentialströmung an der Krümmerinnenwand auftretende Geschwindigkeitsmaximum verschiebt sich in einer reibenden Strömung mit größer werdendem Umlenkungswinkel δ des Krümmers in Richtung wachsender r. Der Betrag der Maximalgeschwindigkeit wird dabei gleichzeitig kleiner (vgl. Abb. 5 und 9). Andererseits kann sich kurz nach dem Eintritt der Strömung in den Krümmer noch kein starkes Maximum der Geschwindigkeit ausbilden. Bei einem bestimmten Umlenkungswinkel δ_0 nimmt also das Geschwindigkeitsmaximum seinen größten Wert an. Bei jedem anderen Winkel ist die Geschwindigkeitsverteilung gleichförmiger. Da nun $\overline{v^2}/r > \bar{v}^2/r$ ist, wird bei dem Winkel δ_0 die durch Integration von v^2/r über den Endquerschnitt des Krümmers ermittelte Stärke der Sekundärströmung am größten.

Beim Eintritt einer Krümmerströmung in einen Diffusor wird die kinetische Energie der Sekundärströmung, die einen wesentlichen Teil der Krümmerverluste ausmacht, zum großem Teil wieder in Druck umgesetzt. Da die Sekundärströmung außerdem die Totwasserbildung im Diffusor vermindert, werden auch die im Diffusor auftretenden Verluste kleiner. Da die Stärke der Sekundärströmung bei dem Umlenkungswinkel δ_0 am größten ist, durchlaufen die Diffusorverluste ein Minimum. Die genaue Bestimmung dieses Winkels δ_0 war mit der vorhandenen Versuchsanordnung leider nicht möglich.

Sind also in einer Kanalanordnung ein Krümmer und ein Diffusor hintereinandergeschaltet, so kann der Verlust in der gesamten Anlage wesentlich kleiner als die Summe der Einzelverluste sein.

4. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird die Strömung in einem Diffusor mit vorgeschaltetem Krümmer untersucht. In dem Diffusor von quadratischem Querschnitt und einem Gesamterweiterungswinkel von 10° tritt bei einer Kanalanordnung ohne vorgeschalteten Krümmer Ablösung ein. Die im Diffusor auftretenden Verluste sind dadurch beträchtlich. Das Ergebnis der Versuche zeigt, daß ein vorgeschalteter Krümmer die Druckverluste im Diffusor vermindern kann. Dadurch wird der Druckverlust in der Gesamtanordnung kleiner als die Summe der Einzelverluste von Krümmer und Diffusor. Das ist auf den Einfluß der sich im Krümmer ausbildenden Sekundärströmung zurückzuführen. Eine überschlägige theoretische Betrachtung und eine genauere experimentelle Untersuchung zeigt weiter, daß die Druckverluste im Diffusor mit wachsendem Umlenkungswinkel des Krümmers ein Minimum durchlaufen. Das hängt damit zusammen, daß die Sekundärströmung bei einem bestimmten Umlenkungswinkel am stärksten ist.

(Eingegangen am 23. April 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dipl. Phys. *K. H. Pohl*, Hamburgische Schiffbau-Versuchsanstalt, Hamburg 33, Bramfelderstr. 164.

Über die Erfassung der Widerstandserhöhung im Seegang durch Energiebetrachtungen

Von K. Eggers

1. Einleitung. Vor kurzem erschien von *Havelock*[1] eine Studie über die Abhängigkeit der Dämpfung der Stampfschwingungen eines schiffsähnlichen Körpers von Frequenz und Fahrt. *Havelock* untersucht eine Strömung, die er aus einer approximativen Quell-Senken-Verteilung erzeugt und ermittelt die Dämpfung durch Integration des Drucks auf einer Fläche, welche der mittleren Lage der Bodenfläche des Körpers entspricht.

Für die hier betrachtete Strömung läßt sich nun die Energie beechnen, die infolge der Wellenbildung während einer Periode abwandert[2]; es ergibt sich, daß ihr Wert der Arbeitsleistung der von *Havelock* angegebenen Dämpfungskraft entspricht. Ebenso läßt sich aber auch die Ausstrahlung von Impuls in diesem Wellensystem berechnen; ihr Zeitmittel verschwindet nicht und kann somit nur aus einer Erhöhung des Wellenwiderstandes des stampfenden Schiffes in Fahrt herrühren, zu dessen Überwindung ebenfalls Arbeit geleistet werden muß. Bringt man diesen Anteil von der gesamten Energieabwanderung einer Periode in Abzug, so reicht dann der Restbetrag der Energie nicht mehr aus, um den Leistungen von *Havelocks* Dämpfungskräften zu entsprechen; die Abweichung wächst mit zunehmender Fahrt und Schwingungszeit.

Die sich hier offenbarende Diskrepanz zwischen der Druckintegrationsmethode und der Wellenenergiemethode verschwindet jedoch, wenn wir der gewählten Quell-Senken-Verteilung zur Erzeugung der Strömung eine Dipolverteilung von oszillierender Intensität superponieren, welche die Variation des Deplacements für den Fahrtwiderstand erfaßt und damit die Approximation der Strömung auf der Körperoberfläche verbessert. Jetzt liefern beide Methoden übereinstimmende Ergebnisse.

Die hier angewandte Verbesserung wurde für idealisierte Schiffsformen (*Michell*-Schiffe) bereits von *Hanaoka*[3] eingeführt. Sie kann aber[4] allgemein für alle Körper angesetzt werden, deren Potential aus einer Quellbelegung proportional der Normalgeschwindigkeit der Strömung auf der Körperoberfläche angenähert wird. Für Ellipsoide in Schwingungen kleiner Amplitude gilt sie damit sogar streng[4], so lange der Einfluß der freien Oberfläche auf die Strömung am Körper vernachlässigt werden kann.

Für die Energiemethode zur Bestimmung der Dämpfungskräfte von Schwingungen in Fahrt wird die Größe der Impulsabstrahlung benötigt, aus der sich die Widerstandserhöhung infolge erzwungener Schwingungen ergibt; darüberhinaus aber gestattet sie auch die Berechnung der Widerstandserhöhung in einem homogenen Wellensystem, das diese Schwingungen erzeugt. Dazu ist es keineswegs erforderlich, den Bewegungsverlauf explizit in seiner Phasenlage und in seinem Amplitudenverhältnis zur ankommenden Welle zu kennen, soweit er nicht in die Quellverteilung zur Erzeugung des Potentials der Wellenreflexion eingeht; es genügt die Kenntnis der Schwingungsamplitude. Durch die Forderung, daß jetzt die gesamte abgestrahlte Energie dem gesamten abgestrahlten Impuls entsprechen muß, daß also die impulslose Leistung der Schwingungsdämpfung vom entsprechenden Anteil des erregenden Wellensystems kompensiert wird, ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen Dämpfungsleistung und Widerstandserhöhung durch Fahrt gegen die erregende Welle, welche zur Widerstandserhöhung durch erzwungene Schwingung hinzugefügt werden muß. Die folgenden numerischen Rechnungen zeigen übrigens, daß beide Widerstandsanteile von gleicher Größenordnung sind, auch wenn die Wellenreflexion am festgehaltenen Schiff klein bleibt, und daß ihre Summe stets positiv ausfällt.

Es ergibt sich damit die Möglichkeit, im Rahmen einer linearen Theorie die bisher nur einzeln diskutierten Anteile der Widerstandserhöhung — Wellenreflexion, Widerstand in erzwungener Schwingung, drifting force — zusammen mit bisher noch nicht erfaßten Termen gleicher Größen-

---

[1] *T. H. Havelock*, Trans. Inst. Nav. Arch. 99 (1958) S. 131. London 1957.
[2] *K. Eggers*, Schiffstechnik 21 (1957) S. 140.
[3] *T. S. Hanaoka*, Proceedings of the Symposium on the Behaviour of Ships in a Seaway, Wageningen 1957, Bd. 1 S. 266 und *K. Eggers* im Bd. 2 S. 898.
[4] *K. Eggers*, Z. angew. Math. Mech. 38 (1958) S. 308.

ordnung zu einem analytisch übersichtlichen Ausdruck zusammen zu fassen. Bei vorgegebenen Amplituden der Schwingungen verschiedener Freiheitsgrade müssen hier nur noch die korrespondierenden Singularitätenverteilungen gefunden werden, was ein Problem der numerischen Analysis ist. Es ist uns damit vor allem möglich, durch Betrachtung charakteristischer vorgegebener Singularitätenverteilungen die qualitative Abhängigkeit von Parametern der Fahrt und Frequenz zu studieren. Daß der Zusammenhang zwischen Singularitäten und erzeugter Körperform bzw. Körperbewegung dabei relativ offen bleibt, darf im augenblicklichen Stadium der theoretischen Entwicklung nicht ins Gewicht fallen. Zwar liegen schon Arbeiten von *Haskind*[1] vor, welche für Körper von genau festgelegten Wasserlinien und Spantformen zahlenmäßige Ergebnisse liefern — es fehlt hier jedoch im Singularitätenansatz der Dipolterm für den Fahrteinfluß; die Widerstandserhöhung der erzwungenen Schwingung, auf welche sich die Rechnung beschränkt, fällt deshalb negativ aus. Exaktere Rechnungen von *Hanaoka* und *Maruo*[2] (letztere unter Berücksichtigung des Seegangs) beschränken sich auf einen sehr begrenzten Fahrt- und Frequenzbereich. Auch ist in diesen Rechnungen übergangen worden, daß Dämpfung und Widerstandserhöhung über alle Grenzen wachsen, wenn sich das Verhältnis der Schiffsgeschwindigkeit zur Phasengeschwindigkeit einer Welle der betrachteten Frequenz dem Werte 1/4 nähert.

Während für erzwungene Schwingungen sich dieses Anwachsen schon aus den Versuchen von *Golovato*[3] erkennen ließ, zeigen neuere Experimente[4] in Übereinstimmung mit unserer Analysis, daß der Effekt auch bei Fahrt eines freibeweglichen Modells gegen einen regelmäßigen Wellenzug auftritt, und zwar nicht nur für die *Froude*sche Zahl $\mathfrak{F} = 0{,}08$, wo dieses Verhältnis sich einstellt, falls Schiffslänge und Wellenlänge zusammenfallen, sondern auch bei $\mathfrak{F} = 0{,}04$, wo offensichtlich für die durch die Schwingung angeregte sekundäre Oberschwingung das Geschwindigkeitsverhältnis $^1/_4$ vorliegt. Aus den folgenden Berechnungen ergibt sich, daß dieser Effekt auch bei Fahrt m i t der Welle zu erwarten ist, und zwar einmal, wenn die Welle mit zweifacher Schiffsgeschwindigkeit voranschreitet, zum andern bei einer Schiffsgeschwindigkeit, welche größer als die der Welle ist.

2. Geschwindigkeitspotential. Bei der analytischen Behandlung der Widerstandserhöhung im Seegang ist es üblich, den schwingenden Schiffskörper zu ersetzen durch ein System von Quellen und Senken oszillierender Intensität, welche nur die Translationsbewegung des Körpers mitmachen. Die Ermittlung der Dämpfungsenergie und Widerstandserhöhung stellen wir im folgenden vorerst nur dar für den Fall, daß die periodische Störung des Wellensystems bereits durch eine einzige Quelle dargestellt werden kann, solange der Fahrteinfluß vernachlässigt wird; für kontinuierliche Quellverteilungen ergeben sich daraus wegen der Linearität der Ansätze durch Integration analoge Ausdrücke, welche noch die Interferenzen zwischen verschiedenen Quellsystemen erfassen.

Das Geschwindigkeitspotential φ der Strömung relativ zu einer oszillierenden Quelle, welche sich mit Geschwindigkeit V parallel zur freien Oberfläche in Tiefe f bewegt, wurde von *Haskind*, *Brard*[5], *Hanaoka* und *Havelock* auf verschiedenem Wege hergeleitet. Bei einer Quellergiebigkeit $e^{i\nu t}$ lautet es im Aufpunkt r

$$\varphi = \frac{e^{i\nu t}}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\mathsf{R}} - \frac{K_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \oint K\left(\frac{e^{K(r\,\bar{E}_\Theta)}}{(K\cos\Theta - \nu/V)^2} + \frac{e^{K(r\,E_\Theta)}}{(K\cos\Theta + \nu/V)^2}\right) dK\right]$$

$$- \frac{i\,K_0\,e^{i\nu t}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2\Theta}{K_1 - K_2}\left(\delta_1\,K_1\,e^{K_1(r\,\bar{E}_\Theta)} + \delta_2\,K_2\,e^{K_2(r\,E_\Theta)}\right) d\Theta\ . \qquad (1)$$

Dabei ist r der Vektor vom an der freien Oberfläche gespiegelten Quellpunkt zum Aufpunkt, $\mathsf{R} = |\mathsf{r}|$ der Abstand vom gespiegelten Quellpunkt zum Aufpunkt, R der Abstand vom Quellpunkt zum Aufpunkt. Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) wählen wir die Richtungen: x = Fahrtrichtung voraus, y = backbord, z = nach oben. Ferner ist E_Θ ein Vektor mit Komponenten $(i\cos\Theta,\ i\sin\Theta,\ 1)$, $\bar{E}_\Theta$ der dazu konjugiert komplexe Vektor; Θ entspricht dem Aus-

[1] *M. D. Haskind*, ZAHI-Bericht 603, Moskau 1946.
[2] *H. A. Maruo*, 60th Anniversary Issue Soc. Nav. Arch. Japan 1958. S. 1.
[3] *P. Golovato*, Ship Research 1957, S. 19. (T. M. B. Report 1074, Washington 1956.)
[4] *O. I. Sibul* u. *G. Reichert*, Research Series 61 Univ. of California, Institute of Engen. 1957.
[5] *R. Brard*, Ass. Techn. Mar. Aero. 47 (1947) S. 455.

breitungswinkel und K der Wellenzahl eines Systems von Wellen, über die integriert wird; im Integral der zweiten Zeile sollen K und Θ miteinander verknüpft sein durch

$$K_1 = K_1(\Theta) = K_0 \sec^2\Theta \left(\frac{1+\sqrt{1-4\,\Omega\cos\Theta}}{2}\right)^2, \tag{1b}$$

$$K_2 = K_2(\Theta) = \widetilde{K}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4\,\Omega\cos\Theta}}\right)^2; \tag{1c}$$

dabei ist gesetzt:

$$K_0 = \frac{g}{V^2},$$

$$\widetilde{K} = \frac{\nu^2}{g},$$

$$\Omega = \frac{\nu V}{g} = \sqrt{\frac{\widetilde{K}}{K_0}}.$$

Schließlich sind die Koeffizienten δ_1 und δ_2 so definiert, daß sie in dem Θ-Bereich verschwinden, in dem K_1 und K_2 nicht reell ausfallen, im übrigen gilt

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= +1 \quad \text{für} \quad |\Theta| \leqq \frac{\pi}{2}, \\ \delta_1 &= -1 \quad \text{für} \quad |\Theta| > \frac{\pi}{2}, \\ \delta_2 &= 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq |\Theta| \leqq \pi \end{aligned}\right\} \text{ falls } K_1,\ K_2 \text{ reell.}$$

Das Symbol $\oint$ bedeutet den *Cauchy*schen Hauptwert des Integrals über K; das Integral der zweiten Zeile stellt den Residuenanteil der Pole bei einem speziellen Umlaufssinn dar, der sich aus asymptotischen Anforderungen an das Potential ergibt. Der Ausdruck (1) wächst über alle Grenzen im Falle $\Omega = \pm\, 1/4$.

Die Quellsingularitäten zur Erzeugung der Körperumströmung werden in ihrer Ergiebigkeit angesetzt in Proportionalität zur Zeitableitung der örtlichen Eintauchung, d. h. zur Strömungsgeschwindigkeit normal zur Körperoberfläche. Zur Erfassung der Variation des Deplacements für die Wellenerzeugung durch Fahrt voraus ist es notwendig, jede solche Quelle zu ergänzen durch einen Dipol oszillierender Intensität, dessen Achse in Fahrtrichtung liegt.*

Ist q ein Maß der örtlichen Tauchamplitude, so wird die Quellergiebigkeit gleich $i\,\nu\,q\,e^{i\nu t}$, das Dipolmoment gleich $-V\,q\,e^{i\nu t}$ komplex angesetzt. Dabei ist ν die Frequenz der Schwingung im mitgeführten Bezugssystem. Das Potential $q\,\varphi^*$ dieser Quell-Dipol-Kombination erhalten wir dann aus φ (1) durch

$$q\,\varphi^* = q\left(i\,\nu\,\varphi - V\frac{d\varphi}{\partial x}\right). \tag{2}$$

Stellen wir die Zeitableitung im mitbewegten System dar durch das Symbol $\partial/\partial t$, die Zeitableitung im ruhenden System durch d/dt, so gilt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

und damit

$$\varphi^* = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{4}$$

3. Energiebetrachtungen. Bewegt sich eine Quelle der Ergiebigkeit $i\,\nu\,q\,e^{i\nu t}$ mit Translationsgeschwindigkeit V im Felde einer mit Frequenz ν relativ zur Quelle periodischer Strömung von einem Potential $\psi = \psi_0\,e^{i\nu t}$, so ist die aus dem Raum um die Quelle pro Periode abwandernde Energie** gegeben durch

$$N^q_{ge} = \frac{1}{2}\,Re\left\{\varrho\,i\,\nu\,q\,e^{i\nu t}\,\frac{d\bar{\psi}}{dt}\right\}, \tag{5a}$$

* Siehe Fußnoten 3 und 4 von Seite 39.
** Siehe Fußnote 2 von Seite 39.

Dem abwandernden Impuls pro Periode entspricht eine Kraft P auf die Quelle in x-Richtung von der Größe

$$P^q = -\frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, i\, \nu\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\right\}, \tag{5b}$$

dem wiederum ein Leistungsanteil

$$N_W^q = -\frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, i\, \nu\, V\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\right\} \tag{5c}$$

entspricht. Der Dämpfungsenergie entspricht die Differenz von (5a) und (5c)

$$N_D^q = \frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, i\, \nu\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}\right\} = \frac{1}{2}\, Re\left\{\nu^2\, q\, \varrho\, \bar{\psi}_0\right\}. \tag{5d}$$

Diese Energie muß je Periode aufgebracht werden, um die Schwingung aufrecht zu erhalten.

Analog erhalten wir für den Dipol der Intensität $q\,V$

$$N_{ges}^d = \frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, V\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{d\bar{\psi}}{dt}\right\}, \tag{6a}$$

$$N_W^d = -\frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, V^2\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{d\bar{\psi}}{\partial x}\right\}, \tag{6b}$$

$$N_D^d = \frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, V\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}\right\}, \tag{6c}$$

und damit erhalten wir für das Quell-Dipol-System

$$N_{ges}^{q\,d} = \frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{d}{dt}\, \frac{d\bar{\psi}}{dt}\right\}, \tag{7a}$$

$$N_W^{q\,d} = -\frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, q\, V\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{d\bar{\psi}}{dt}\right\}, \tag{7b}$$

$$N_D^{q\,d} = \frac{1}{2}\, Re\left\{\varrho\, q\, e^{i\nu t}\, \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}\right\}. \tag{7c}$$

Ist ψ die durch die Singularitäten erzeugte Strömung, so ist in (5) einzusetzen $\psi = q\,\varphi$; in den Formeln (7) hingegen $\psi = q\,\varphi^* = q\,d\varphi/dt$. Es ist dann $(r\,E_\Theta) = -2\,f$ zu setzen. Es leistet dann aber nur das Integral in der zweiten Zeile von (1) einen Beitrag zu den Ausdrücken (5), (6) und (7). Dieses Integral bestimmt das Wellenfeld in großer Entfernung.

Nun ist aber[1]

$$\frac{d}{dt}\,\delta_j\, e^{K_j\left(r\,\bar{E}_\Theta\right)+i\nu t} = \delta_j\, i\,(VK_j\cos\Theta + \nu)\, e^{K_j\left(r\,\bar{E}_\Theta\right)+i\nu t} = +\,i\sqrt{g\,K_j}\; e^{K_j\left(r\,\bar{E}_\Theta\right)+i\nu t}\;(j = 1{,}2)\,. \tag{8}$$

Damit erhalten wir aus (1) und (5) für die Quelle in der durch sie erzeugten Strömung vom Potential $q\,\varphi$

$$N_D^q = \frac{\varrho\,\nu^3}{8\,\pi}\, q\,\bar{q}\, K_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2\Theta}{K_1 - K_2}\left(\delta_1\, K_1\, e^{-2\,K_1 f} + \delta_2\, K_2\, e^{-2\,K_2 f}\right) d\Theta\,, \tag{9a}$$

$$N_W^q = \frac{\varrho\,\nu^2\, V}{8\,\pi}\, q\,\bar{q}\, K_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec\Theta}{K_1 - K_2}\left(\delta_1\, K_1^2\, e^{-2\,K_1 f} + \delta_2\, K_2^2\, e^{-2\,K_2 f}\right) d\Theta\,, \tag{9b}$$

$$N_{ges}^q = \frac{\varrho\,\nu^2 g^{1/2}}{8\,\pi}\, q\,\bar{q}\, K_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2\Theta}{K_1 - K_2}\left(K_1^{3/2}\, e^{-2\,K_1 f} + K_2^{3/2}\, e^{-2\,K_2 f}\right) d\Theta\,. \tag{9c}$$

---

[1] *K. Eggers*, Schiff und Hafen 11 (1957) S. 834.

Für die Quell-Dipol-Kombination ergibt sich hingegen aus (1), (4) und (7)

$$N_D^{q\,d} = \frac{\varrho\, g}{8\,\pi} K_0\, q\, \bar{q}\, \nu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{K_1 - K_2} \left(\delta_1\, K_1^2\, e^{-2\,K_1 f} + \delta_2\, K_2^2\, e^{-2\,K_2 f}\right) d\Theta\,, \tag{10a}$$

$$N_W^{q\,d} = \frac{\partial\, g}{8\,\pi} K_0\, q\, \bar{q}\, V \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec \Theta}{K_1 - K_2} \left(\delta_1\, K_1^3\, e^{-2\,K_1 f} + \delta_2\, K_2^3\, e^{-2\,K_2 f}\right) d\Theta\,, \tag{10b}$$

$$N_{ges}^{q\,d} = \frac{\varrho\, g}{8\,\pi} g^{3/2}\, K_0\, q\, \bar{q} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{K_1 - K_2} \left(K_1^{5/2}\, e^{-2\,K_1 f} + K_2^{5/2}\, e^{-2\,K_2 f}\right) d\Theta\,. \tag{10c}$$

Formel (9a) ergibt mit $K_0 \to \infty$ die Dämpfungsleistung einer ruhenden oszillierenden Quelle, der Beitrag von K_1 verschwindet und es wird $K_2 = \widetilde{K} = \nu^2/g$. Im Falle $\nu = 0$ hingegen ergibt (10b) die Widerstandsleistung eines Körpers, der durch einen diskreten Dipol vom stationären Moment q dargestellt wird, der Anteil von K_2 verschwindet und es gilt $K_1 = K_0 \sec^2 \Theta$. Im Sektor $|\Theta| \geqq \pi/2$ leisten die durch K_1 vertretenen Fahrtwellen einen negativen Beitrag zur Dämpfung, die durch K_2 vertretenen Schwingungswellen einen negativen Beitrag zum Widerstand*.

Berechnet man die Dämpfungsleistung nach *Haskind* und *Havelock* durch Druckintegration des Potentials einer Quellverteilung ohne Dipolzusatzterm, so erhält man Ausdrücke von der Form (9c); da die Translationsgeschwindigkeit zwar in der Druckgleichung, nicht aber im Singularitätensystem berücksichtigt ist, liegen diese Ausdrücke in den Potenzen der Wellenzahlen zwischen (9a) und (10a).

4. Fahrt gegen reguläres Wellensystem. Nun sei ein Wellenfeld gegeben durch

$$\Phi = \frac{h\, g}{\nu_0}\, e^{-K(r\, E_\alpha) + i \nu_0 t}\,, \tag{11}$$

wobei r der Ortsvektor bezüglich eines Koordinatenursprungs auf der freien Oberfläche $z = 0$ ist; E_α sei der Vektor $(i \cos\alpha,\ i \sin\alpha,\ 1) \cdot \alpha$ stellt den Winkel der Fortschrittsrichtung der Wellen gegen den Schiffskurs, d. h. gegen die x-Richtung dar. ν_0 ist die Frequenz der Welle in ruhendem Bezugssystem, $K = \nu_0^2/g$ die Wellenzahl und h die Wellenamplitude.

In einem mit Geschwindigkeit V mitgeführten Bezugssystem hat die Welle die Begegnungsfrequenz

$$\nu = Re\left\{\Phi^{-1}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\} = \nu_0\,(1 - \Omega_0 \cos\alpha) \tag{12}$$

mit $\Omega_0 = \nu_0\, V/g$.

Durch (12) wird der Bewegungsfrequenz ein negatives Vorzeichen zugeordnet für den Fall, daß die Änderung des Schwingungsausschlags gegensinnig zu der Änderung der Wellenhöhe im ruhenden System erfolgt.

Aus (12) folgt

$$\Omega \cos\alpha = \Omega_0 \cos\alpha\,(1 - \Omega_0 \cos\alpha)\,. \tag{13}$$

Unabhängig von der Fortschrittsrichtung α des Wellenzuges kann also $\Omega \cos\alpha$ nur im Bereich $0 < \Omega_0 \cos\alpha < 1$ positive Werte annehmen, und zwar den maximalen Wert 1/4 bei $\Omega_0 \cos\alpha = 1/2$, also wenn das Schiff mit der halben Geschwindigkeit g/ν der überholenden Welle fährt. Die Auflösung von (13) nach $\Omega_0 \cos\alpha$ ergibt

$$\Omega_0 \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - 4\,\Omega \cos\alpha}\right); \tag{14}$$

---

* Siehe Fußnote 1 von Seite 42.

damit wird

$$(1 - \Omega_0 \cos\alpha)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\,\Omega \cos\alpha}\right)\right]^2 \tag{15}$$

und somit

$$K = \frac{\nu_0^2}{g} = \frac{\nu^2}{g}\left(\frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 4\,\Omega \cos\alpha}}\right)^2 \tag{16}$$

d. h. mit (1b), (1c) haben wir, da K_1 und K_2 durch Vorzeichenwechsel der Wurzel auseinander hervorgehen:

$$K = K_1(\alpha) \tag{17a}$$

bzw.

$$K = K_2(\alpha)\,, \tag{17b}$$

je nachdem, ob $\Omega_0 \cos\alpha$ größer oder kleiner als $1/2$ ist.

Wir wollen nun die Überlagerung betrachten von einem Wellenfeld (11) mit dem Feld $q\varphi$ bzw. $q\varphi^*$ einer oszillierenden Störung; insbesondere wollen wir annehmen, daß die Oszillation durch die Wirkung des Wellenfeldes (11) stationär aufrecht erhalten wird, daß es sich nämlich um das Oszillationswellensystem eines Schiffes im Wellensystem (11) handelt. Dem abwandernden Impuls des resultierenden Wellensystems entspricht der Mittelwert der Kraft zur Überwindung der Widerstandserhöhung durch Seegang und Oszillation; der hieraus resultierende Leistungsanteil N_W muß aber der gesamten abwandernden Leistung entsprechen, wenn die Energie zur Aufrechterhaltung der Schwingung von der Welle selbst hervorgebracht, also nicht von außen zugeführt wird. Es muß also N_D, die Differenz von Gesamtleistung und Widerstandsleistung, verschwinden, d. h. aber, daß der Anteil N_{D_2} des Wellenfeldes (11) dem negativen Anteil N_{D_1} der Oszillationswellen gleich sein muß. Für das Potential (11) ist nun aber bei beliebiger Quell- und Dipolverteilung aus (5) und (6) ersichtlich, daß zwischen der zugehörigen Dämpfungsleistung N_{D_2} und der Widerstandsleistung N_{W_2} die Beziehung besteht

$$\frac{1}{i\,\nu} N_{D_2} = -\frac{1}{i\,V\,K\cos\alpha} N_{W_2}\,. \tag{18}$$

Damit können wir aber die gesamte Widerstandsleistung durch

$$N_{W\,ges} = N_{W_1} - \frac{V\,K\cos\alpha}{\nu} N_{D_1} \tag{19}$$

d. h. durch Widerstandsleistung N_{W_1} und Dämpfungsleistung N_{D_1} des Oszillationsfeldes ausdrücken. Einsetzen von (16) ergibt dann

$$N_{W\,ges} = N_{W_1} - \Omega\cos\alpha\left(\frac{2}{1 \mp \sqrt{1 - 4\,\Omega\cos\alpha}}\right)^2 N_{D_1}\,. \tag{20}$$

Im Falle $0 \leqq \Omega_0 \cos\alpha \leqq 1$, d. h. wenn das Schiff vor der Welle läuft, aber noch nicht überholt wird, fällt der zweite Term von (20), welcher der Widerstandserhöhung durch den Seegang entspricht, negativ aus, da in diesem Bereiche $\Omega\cos\alpha \geqq 0$ ist. Im übrigen erscheint bei gleichem $\Omega_0\cos\alpha$ die Widerstandserhöhung größer wenn $\Omega_0\cos\alpha > 1/2$ ist, wenn das Schiff also die Wellen einholt, als bei Fahrt gegen die Wellen; im letzteren Fall ist bei gleichem V die zugehörige Frequenz ν_0 kleiner, d. h. die Wellen länger.

Es hat den Anschein, als ob in dem Ausdruck (20) die Phasendifferenz zwischen der erregenden Welle und der oszillierenden Singularität nicht eingeht; im Falle eines schwingenden Körpers ist aber diese Differenz gerade bestimmt durch die Dämpfung der Schwingung, welche den zweiten Summanden von (20) ausmacht.

Setzen wir den Ausdruck (9) bzw. (10) in (20) ein, so erhalten wir

$$N^q_{W\,ges} = \frac{\varrho\,\nu^2\,V}{8\,\pi} K_0\, q\,\bar{q} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2\Theta}{K_1 - K_2}$$
$$\times \left[\delta_1 K_1 (K_1\cos\Theta - K\cos\alpha)\, e^{-2K_1 f} + \delta_2 K_2 (K_2\cos\Theta - K\cos\alpha)\, e^{-2K_2 f}\right] d\Theta\,, \tag{21a}$$

$$N_{W\,ges}^{q\,d} = \frac{\varrho\, g\, V}{8\,\pi} K_0\, q\, \bar{q} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{K_1 - K_2}$$

$$\times \left[\delta_1 K_1^2 (K_1 \cos\Theta - K \cos\alpha)\, e^{-2K_1 f} + \delta_2 K_2^2 (K_2 \cos\Theta - K\cos\alpha)\, e^{-2K_2 f}\right] d\Theta\,. \qquad (21b)$$

Für $\alpha = \pi$, $\Omega > 0$ oder $\alpha = 0$, $\Omega > 0$ gilt nun aber: $-K\cos\alpha = K_1(\pi)$ bzw. $K_2(\pi)$ und da für $|\Theta| > \pi/2$ gilt*

$$|K_2 \cos\Theta| \leqq K_2(\pi) < K_1(\pi) \leqq |K_1 \cos\Theta| \qquad (22)$$

so folgt, daß auch in diesem Θ-Bereich die Beträge der Summanden von (21) positiv sind, daß also der Gesamtwiderstand bei Fahrt senkrecht zur Wellenfront stets positiv ausfällt, solange die Welle das Schiff nicht überholt.

5. Widerstandsbeiwert und Dämpfungsbeiwert. In den unseren Untersuchungen zu Grunde liegenden praktischen Problemen haben die gesuchten Größen nicht die Dimension von Leistungen. Für den Widerstand interessiert der Mittelwert der Kraft zur Überwindung des Zusatz-Widerstandes, für die Betrachtung der Schwingung die Abklingkonstante einer freien Schwingung.

Wir führen dimensionslose Parameter von Fahrt und Frequenz ein durch

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{K_0 f}} = \frac{V}{\sqrt{f g}}\,, \qquad (23a)$$

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\widetilde{K} f} = v\sqrt{f/g}\,. \qquad (23b)$$

Es gilt dann $\Omega = \mathfrak{N}\,\mathfrak{V}$. Wir haben als Bezugslänge für die Frequenz die Eintauchtiefe f der Störung gewählt, weil das Wellenbild, insbesondere das relative Verhalten von Dämpfung und Widerstand, entscheidend von $\widetilde{K} f$, d. h. von der Tiefe der Singularitäten, abhängt. Auch bei Schiffen erscheint es deshalb angebracht, die Frequenz nicht durch die Breite**, sondern durch den Tiefgang dimensionslos darzustellen.

Einen dimensionslosen Dämpfungsbeiwert definieren wir dann durch

$$D_1 = \frac{8\,\pi f^{5/2}}{\varrho\, q\, \bar{q}\, g^{3/2}} \frac{1}{\mathfrak{N}^2} N_{D_1}\,, \qquad (24a)$$

einen Widerstandsbeiwert W_1 der erzwungenen Schwingung durch

$$W_1 = \frac{8\,\pi f^{5/2}}{\varrho\, q\, \bar{q}\, g^{3/2}} \frac{1}{\mathfrak{V}} N_{W_1} \qquad (24b)$$

und den Gesamtwiderstandsbeiwert W gemäß (20) durch

$$W = W_1 - \left(\frac{2}{1 \mp \sqrt{1 - 4\,\Omega\cos\alpha}}\right)^2 \mathfrak{N}^3\, D_1 \cos\alpha\,. \qquad (24c)$$

Die Formeln (5a), (6a) zur Ermittlung abwandernder Energie gelten in verallgemeinerter Form für alle bewegten Körper, die durch Singularitätensysteme dargestellt werden, insbesondere auch dann, wenn die Körper nicht voll eingetaucht sind, sondern die freie Oberfläche durchstoßen***. Es braucht dabei nicht die Annahme eines kleinen Breiten–Längen-Verhältnisses gemacht werden, solange sich die entstehenden Wellenfelder nur linear superponieren lassen. Der Ausdruck für die gesamte Widerstandserhöhung W im Seegang, der aus dem Ansatz (5a) bzw. (5b) berechnet ist, gilt damit unter denselben Bedingungen auch für nicht voll eingetauchte Körper.

---

* Siehe Fußnote 1 von Seite 42.
** Siehe Fußnoten 1 von Seite 39 und 3 von Seite 40.
*** Siehe Fußnote 2 von Seite 39.

Führen wir noch dimensionslose Wellenzahlen ein durch

$$\mathfrak{N}_1 = K_1 f, \tag{25a}$$

$$\mathfrak{N}_2 = K_2 f, \tag{25b}$$

$$\mathfrak{N} = K f, \tag{25c}$$

so erhalten wir aus (9) und (10) für die Quelle

$$D_1 = \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} (\delta_1 \mathfrak{N}_1 e^{-2\mathfrak{N}_1} + \delta_2 \mathfrak{N}_2 e^{-2\mathfrak{N}_2})\, d\Theta, \tag{26a}$$

$$W_1 = \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathfrak{B}^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec \Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} (\delta_1 \mathfrak{N}_1^2 e^{-2\mathfrak{N}_1} + \delta_2 \mathfrak{N}_2^2 e^{-2\mathfrak{N}_2})\, d\Theta, \tag{26b}$$

$$W = \frac{\mathfrak{B}^3}{\mathfrak{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} [\delta_1 \mathfrak{N}_1 (\mathfrak{N}_1 \cos\Theta - \mathfrak{N} \cos\alpha) e^{-2\mathfrak{N}_1} + \delta_2 \mathfrak{N}_2 (\mathfrak{N}_2 \cos\Theta - \mathfrak{N} \cos\alpha) e^{-2\mathfrak{N}_2}]\, d\Theta \tag{26c}$$

und für die Quell-Dipol-Kombination

$$D_1 = \frac{1}{\mathfrak{N}\,\mathfrak{B}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} (\delta_1 \mathfrak{N}_1^2 e^{-2\mathfrak{N}_1} + \delta_2 \mathfrak{N}_2^2 e^{-2\mathfrak{N}_2})\, d\Theta, \tag{27a}$$

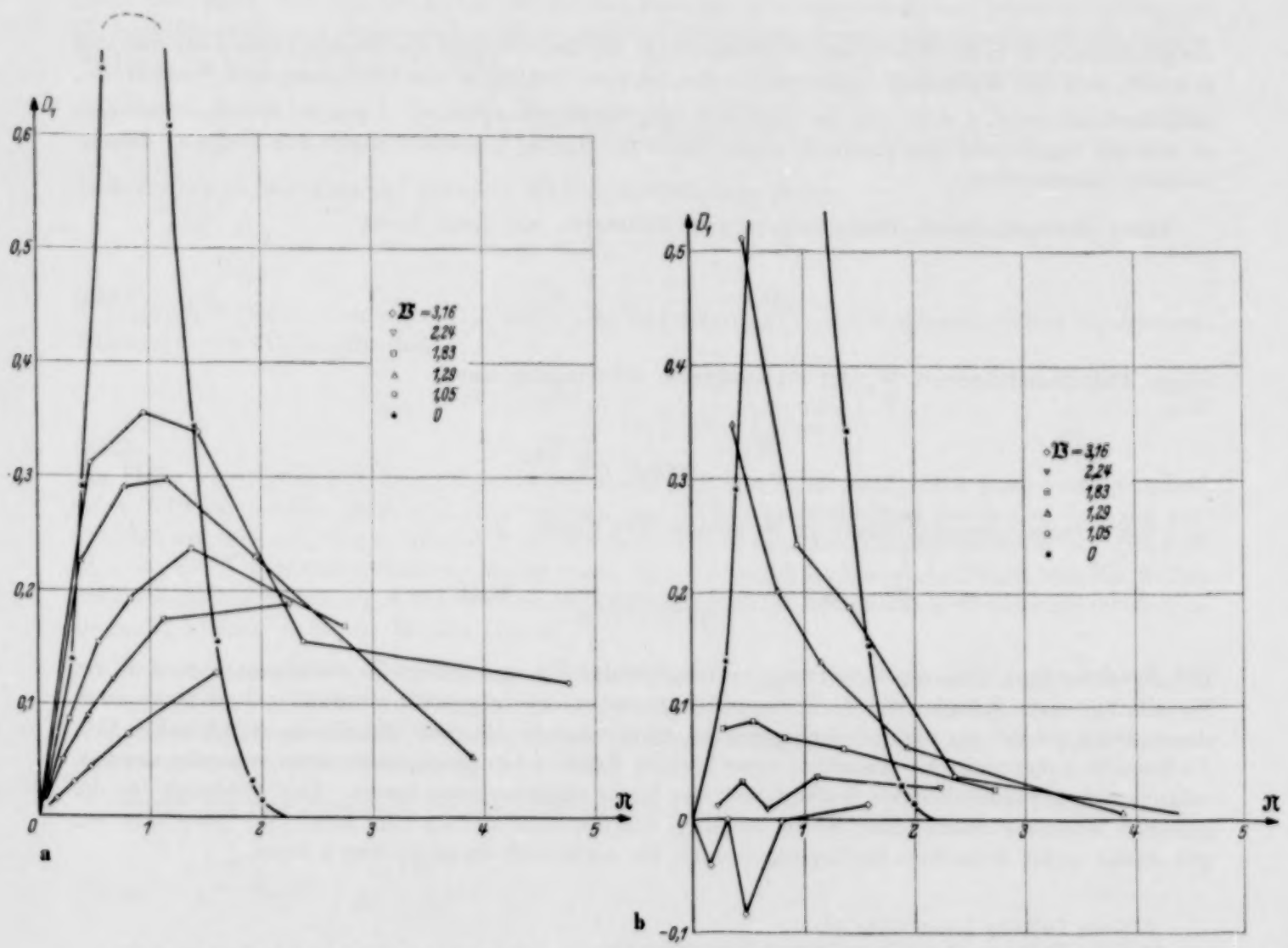
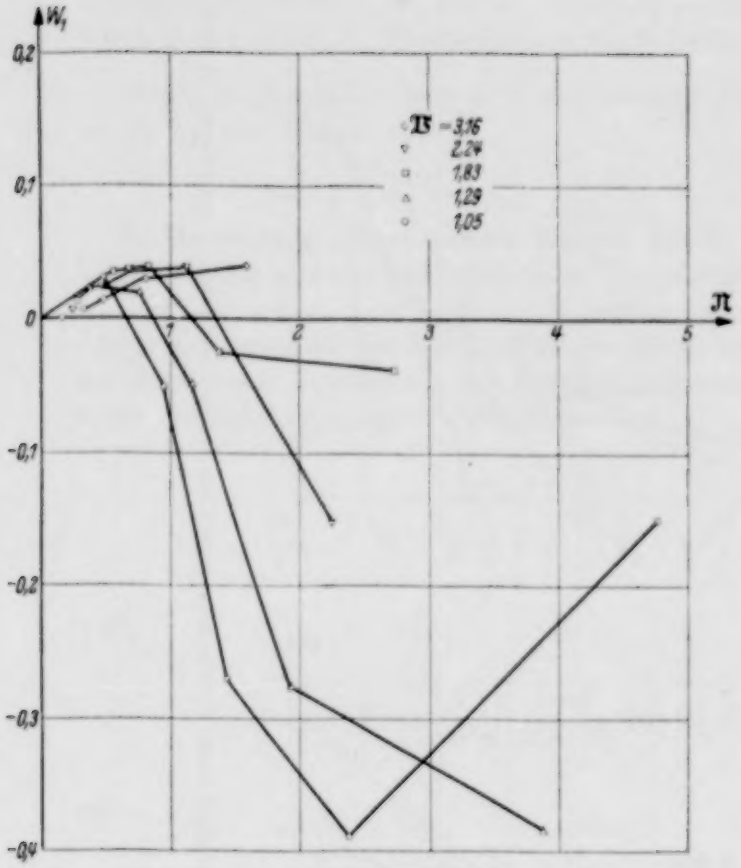


Abb. 1a und b. Dämpfungsbeiwert D_1 in Abhängigkeit von Frequenz und Fahrt. — a) für Quelle; b) für Quell-Dipol-Kombination.



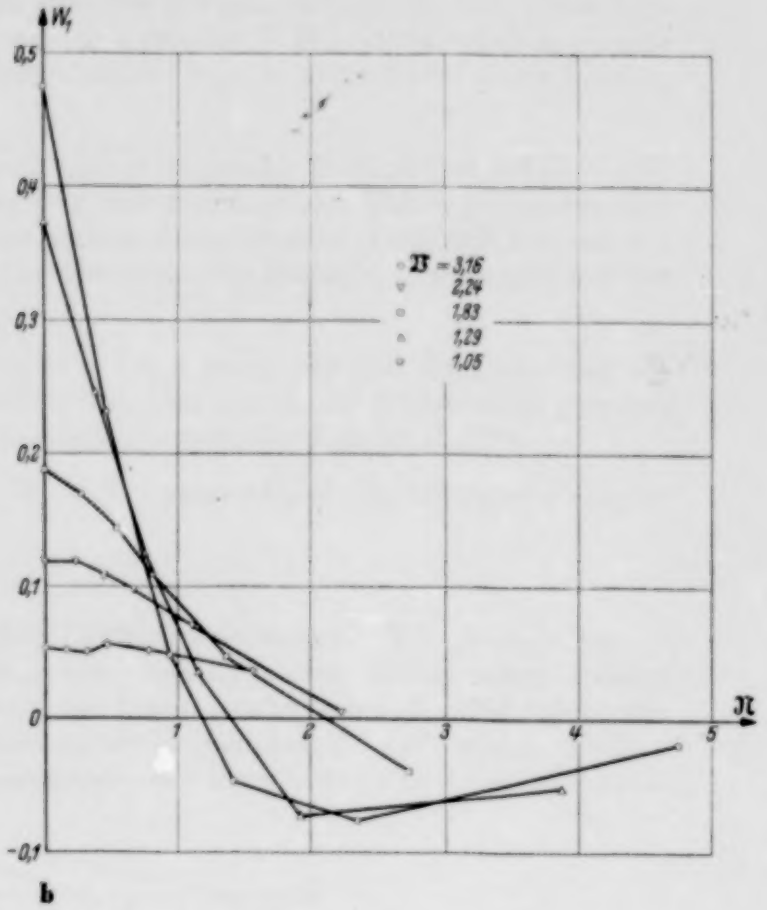


Abb. 2a und b. Widerstandsbeiwert W_1 der erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von Frequenz und Fahrt. a) für Quelle; b) für Quell-Dipol-Kombination.

$$W_1 = \frac{1}{\mathfrak{V}^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec\Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} \left(\delta_1 \mathfrak{N}_1^3 e^{-2\mathfrak{N}_1} + \delta_2 \mathfrak{N}_2^3 e^{-2\mathfrak{N}_2}\right) d\Theta \,, \tag{27b}$$

$$W = \frac{1}{\mathfrak{V}^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2\Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} \left[\delta_1 \mathfrak{N}_1^2 (\mathfrak{N}_1 \cos\Theta - \mathfrak{N}\cos\alpha) e^{-2\mathfrak{N}_1} + \delta_2 \mathfrak{N}_2^2 (\mathfrak{N}_2 \cos\Theta - \mathfrak{N}\cos\alpha) e^{-2\mathfrak{N}_2}\right] d\Theta \,. \tag{27c}$$

Die Ausdrücke, welche *Haskind* für D_1 und W_1 durch Druckintegration des Potentials der Quelle erhält, liegen in der Potenz der Wellenzahlen zwischen (26a b) und (27a b) in Analogie zu (9c).

Die Ausdrücke (26) und (27) wurden für eine Reihe von Wertepaaren $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$ berechnet, wobei Ω die Werte 0; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5 und $K_0 f$ die Werte 0,1; 0,2; 0,3; 0,6; 0,9 und ∞ durchlief. Die Integrale wurden nach der *Simpson*regel mit Schrittweite $\pi/18$ berechnet, wobei die Umgebung der Stelle $\Omega \cos\Theta = 1/4$ besonders abgeschätzt wurde. Der Ausdruck für W wurde für den Fall berechnet, daß die Fahrt gegen die Wellen erfolgt ($\alpha = \pi$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1(\pi)$).

Die errechneten Werte für D_1 nach (26a) und (27a) sind in den Abb. 1a und 1b aufgetragen über $\mathfrak{N}$. Obwohl für $\mathfrak{N}\,\mathfrak{V} = 1/4$ die Ausdrücke für D und W über alle Grenzen wachsen, lassen sich die Punkte glatt verbinden mit den Werten für $\mathfrak{N} = 0$; der Bereich der Spitzen, in denen das

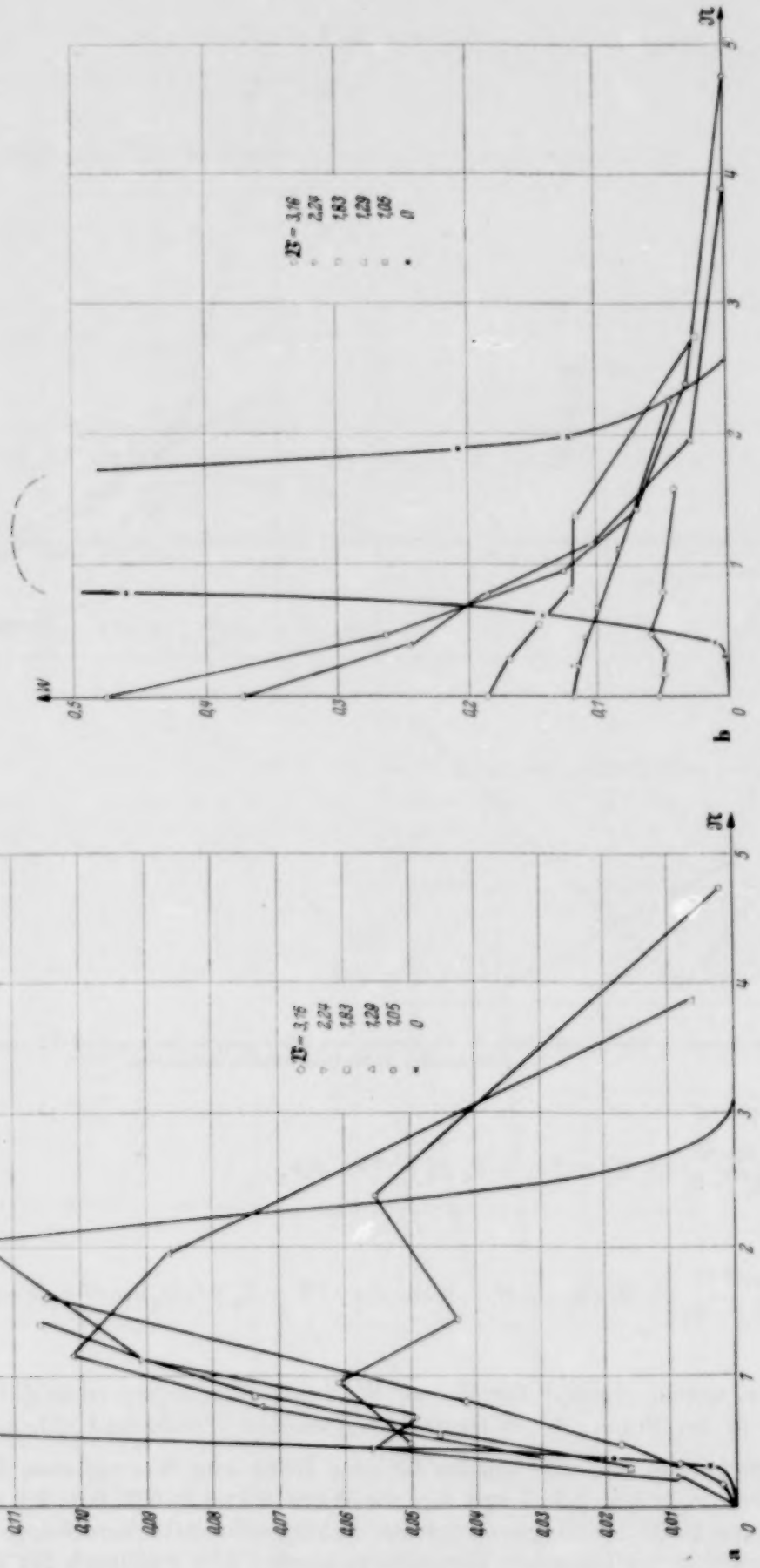


Abb. 3a und b. Widerstandsbeiwert W der freien Schwingung in der Welle in Abhängigkeit von Frequenz und Fahrt. — a) für Quelle; b) für Quell-Dipol-Kombination.

Anwachsen erfolgt, erscheint sehr schmal, wie auch *Havelock* genauer festgestellt hat. Eine Auftragung von N_D über $\mathfrak{V}$ mit zusätzlicher Berechnung der Werte für $\mathfrak{N}\,\mathfrak{V} = 0{,}245$ ergab noch eine monotone Tendenz der Kurve; für N_W hingegen ließen sich die Punkte nicht durch glatte Kurven verbinden!

Abb. 1b zeigt, daß der zusätzliche Dipolterm in (27a) fast im ganzen Bereich (bis auf $\Omega = 0{,}5$; $K_0 f = 0{,}9$ und 0,6) eine Verminderung der Dämpfung mit zunehmender Fahrt gegenüber den Werten für die Quelle nach (26a) bringt; schon aus diesem orientierenden Vergleich können wir den Schluß ziehen, daß der Ansatz von *Haskind* das Abklingen der Dämpfung mit zunehmender Fahrt zu schwach erfaßt.

Dem stärkeren Abklingen der Dämpfung beim Quell-Dipol entspricht eine Vergrößerung des Widerstandsbeiwertes W_1 für die erzwungene Schwingung; (der Anteil der Fahrtwellen gewinnt durch den Faktor $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}^2$ stärker als die Schwingungswellen durch den Faktor $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}^2$).

Dagegen klingt der zweite Widerstandsanteil, $W - W_1$, proportional zur Dämpfung stärker ab als bei der Einzelquelle.

6. Darstellung schwingender Körper durch Singularitätenverteilungen. Wir dehnen unsere Untersuchung aus auf kontinuierliche Verteilungen, welche sich längs einer horizontalen Geraden $-L/2 \leqq x \leqq L/2$, $y = 0$, $z = -f$ erstrecken und die Umströmung eines Schiffskörpers der Länge L approximieren sollen. Für eine Quellverteilung der Ergiebigkeit $i\,\nu\,q\,e^{i\nu t}\,\sigma(x)/L$ erhalten wir dann nach Aufstellung des Geschwindigkeitspotentials und Berechnung der Leistungsanteile unter Berücksichtigung des Dipolzusatzes

$$D_1 = \frac{1}{\mathfrak{N}\,\mathfrak{V}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} \left(\delta_1\, \mathfrak{N}_1^2\, H_1\, \bar{H}_1 + \delta_2\, \mathfrak{N}_2^2\, H_2\, \bar{H}_2\right) d\Theta \tag{28a}$$

und

$$W_1 = \frac{1}{\mathfrak{V}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec \Theta}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2} \left(\delta_1\, \mathfrak{N}_1^3\, H_1\, \bar{H}_1 + \delta_2\, \mathfrak{N}_2^3\, H_2\, \bar{H}_2\right) d\Theta \tag{28b}$$

mit

$$H_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sigma(\xi)\, e^{-\mathfrak{N}_j + i\, l\, \mathfrak{N}_j\, \xi \cos \Theta}\, d\xi \qquad (j = 1, 2)\,, \tag{29}$$

wobei $\xi = 2\,x/L$, $l = L/2\,f$ ist.

Für Tauchschwingungen eines quaderförmigen Körpers mit kleiner Ausdehnung in y-Richtung setzt man an $\sigma(x) = \sigma_T(x) = 1$; es wird dann

$$H_j = e^{-\mathfrak{N}_j}\, N_0\,(\mathfrak{N}_j\, l \cos \Theta) \qquad (j = 1, 2) \tag{30a}$$

mit

$$N_0(\lambda) = \int_0^1 \cos\,(\lambda\, \xi)\, d\xi = -\frac{\sin \lambda}{\lambda}\,. \tag{30b}$$

Für Stampfschwingungen desselben Körpers, welche den Tauchschwingungen um $\varepsilon - \pi/2$ in der Phase vorauslaufen mögen, wird analog gesetzt

$$\sigma(x) = \sigma_s(x) = \xi\, e^{i\,(\varepsilon - \pi/2)}\,; \tag{31a}$$

es wird dann

$$Hj = e^{-\mathfrak{N}_j + i\,\varepsilon}\, M_1\,(\mathfrak{N}_j\, l \cos \Theta) \qquad (j = 1{,}2) \tag{31b}$$

mit

$$M_1(\lambda) = \int_0^1 \xi \sin(\lambda\,\xi)\, d\xi\,. \tag{31c}$$

Für diese beiden Fälle wurden die Größen D_1, W_1 und W nach (28) und (24c) berechnet. Bei Überlagerung von Tauch- und Stampfschwingungen sind die entsprechenden Verteilungen $\sigma(x)$ zur Bestimmung von (29) — eventuell mit verschiedenen Gewichtsfaktoren— zu superponieren; in den Ausdrücken für D_1, W_1 und W treten dann noch gemischte Glieder auf, welche den Faktor $\cos\varepsilon$ enthalten, also verschwinden, wenn die Tauchschwingung mit der Stampfschwingung synchron ihre maximalen Werte erreicht. (*Haskind* betrachtete in seiner Analysis nur diesen Fall

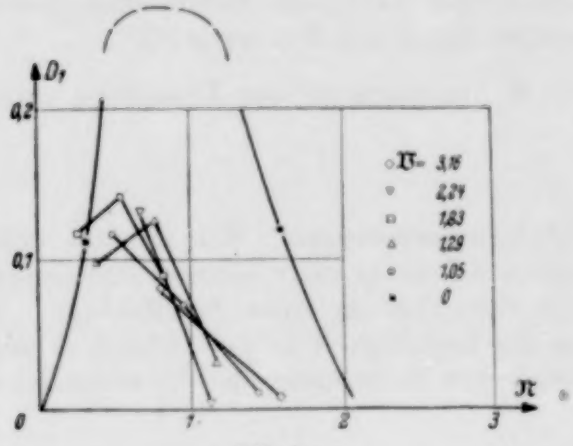


Abb. 4a.

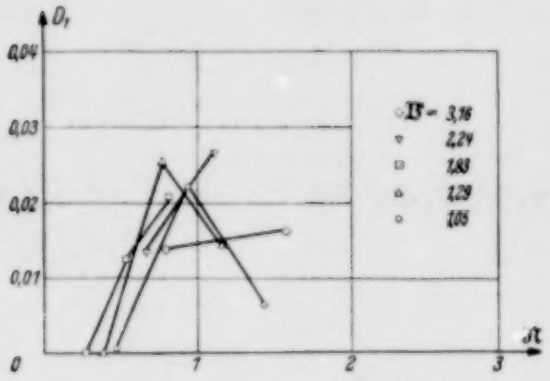


Abb. 4c.

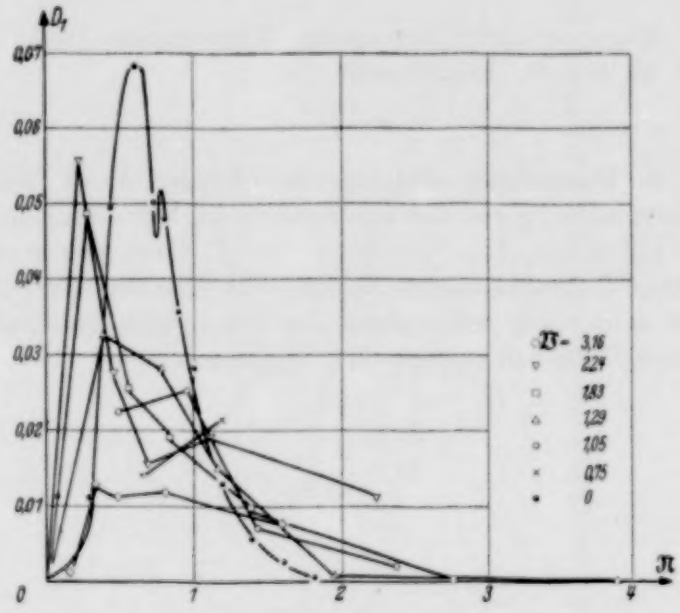


Abb. 4b.

Abb. 4a — c. Dämpfungsbeiwert des schmalen Quaders in Abhängigkeit von Frequenz und Fahrt. — a) Tauchschwingung; b) Stampfschwingung; c) Kopplung.

und vernachlässigte deshalb in seinen Bewegungsgleichungen den sich aus D_1 ergebenden Beitrag zur Dämpfungskopplung.) Die Kopplungsterme lauten

$$D_1 = \frac{1}{\mathfrak{N}\,\mathfrak{V}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2\Theta}{\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2} \left(\delta_1\,\mathfrak{K}_1^2\,N_0\,M_1\,e^{-2\,\mathfrak{K}_1} + \delta_2\,\mathfrak{K}_2^2\,N_0\,M_1\,e^{-2\,\mathfrak{K}_2}\right) d\Theta\,, \tag{32a}$$

$$W_1 = \frac{1}{\mathfrak{V}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec\Theta}{\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2} \left(\delta_1\,\mathfrak{K}_1^3\,N_0\,M_1\,e^{-2\,\mathfrak{K}_1} + \delta_2\,\mathfrak{K}_2^3\,N_0\,M_1\,e^{-2\,\mathfrak{K}_2}\right) d\Theta\,. \tag{32b}$$

Die Ausdrücke (32ab) verschwinden (und zwar allgemein für in Längsrichtung symmetrische Schiffe) identisch für $\mathfrak{V} = 0$. Der Audsruck $D_1 \cos\varepsilon$ gibt nur den Teil der Geschwindigkeitskopplung der Differentialgleichungen für die Schwingung wieder, welcher zu Energiedissipation führt, der also in beiden Gleichungen dasselbe Vorzeichen hat.

Für die Singularitätenverteilung (31a) hat *Havelock* für $l = 5$ den Ausdruck für D_1 berechnet unter Auslassung der Dipolkorrektur. Seine Untersuchungen gelten vornehmlich dem Anwachsen des Dämpfungskoeffizienten im Bereich $\Omega \approx 1/4$. *Havelock* wies darauf hin, daß D_1 (und damit

auch W) nur dann für $\Omega = 1/4$ unendlich groß wird, wenn nicht $M_1(K_f(0)\,l)$ verschwindet im Falle der Stampfschwingung; für die Tauchschwingung bleibt D endlich, wenn $N_0(K_f(0)\,l)$ verschwindet.

Die folgenden Untersuchungen behandeln den Fall $l = 10$ unter Berücksichtigung der Dipolkorrektur. Die Rechnungen wurden beschränkt auf Wertepaare $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$, welche bei Fahrt eines Schiffes gegen einen regelmäßigen Wellenzug auftreten, wenn die Wellenlänge von der Größenordnung der Schiffslänge ist.

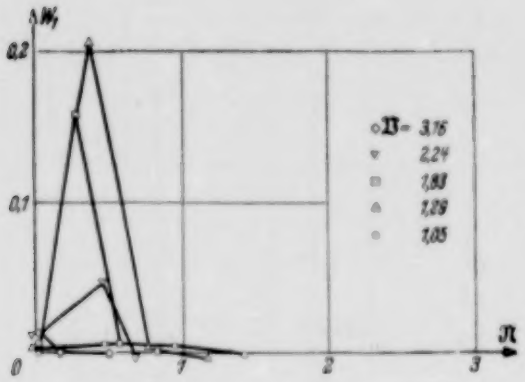


Abb. 5a.

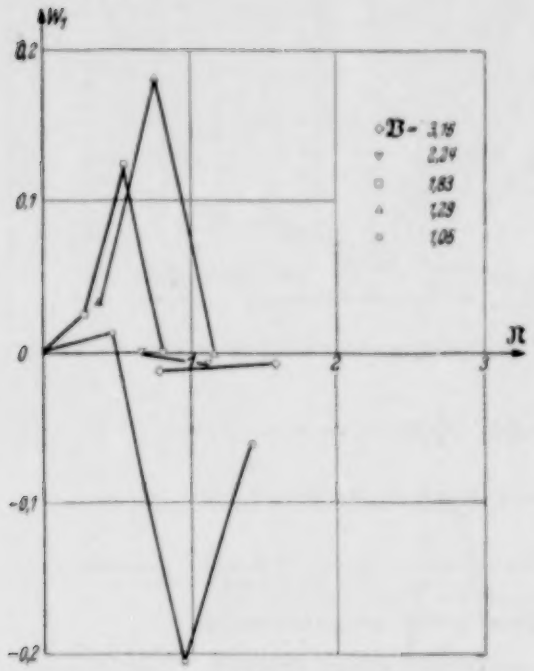


Abb. 5c.

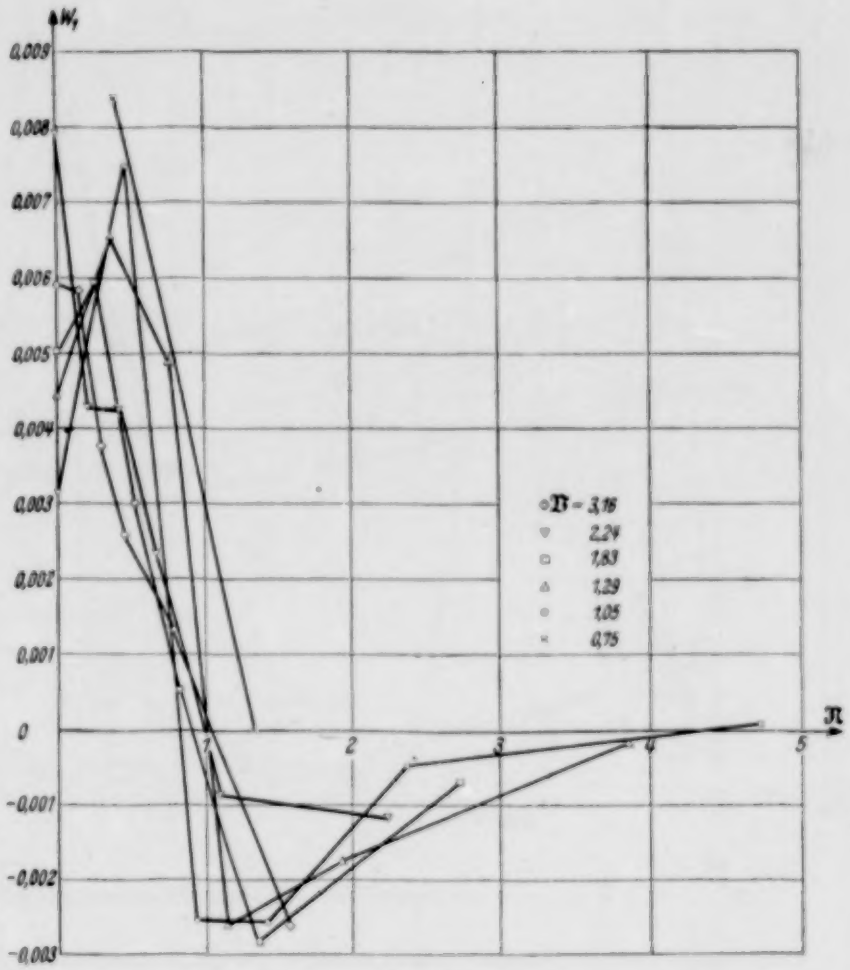


Abb. 5b.

Abb. 5a — c. Widerstandsbeiwert der erzwungenen Schwingung des schmalen Quaders in Abhängigkeit von Frequenz und Fahrt. — a) Tauchschwingung; b) Stampfschwingung; c) Kopplung.

Die errechneten Dämpfungsbeiwerte D_1, nach Formel (28a) bzw. (32a) unter Benutzung von (30a) und (31b), sind in Abb. 4a, b, c dargestellt; die Kurven für $\mathfrak{V} = 0$ sind in Abb. 7 noch einmal wiederholt in Gegenüberstellung zu der entsprechenden für die Quelle. Abb. 7 läßt erkennen, daß die gewählte Längenausdehnung der Quellverteilung im Vergleich zu den Wellenlängen, welche zur Dämpfung wesentlich beitragen, so klein ist, daß die Kurven für Quelle und Tauchschwingung weitgehend übereinstimmen; deshalb erscheint auch der Dämpfungsbeiwert der Stampfschwingung in diesem Bild von wesentlich kleinerer Größenordnung. Die ausstrahlenden Wellen sind hier durch Interferenzen abgeschwächt, welche für die Tauchschwingung erst durch den Fahrteinfluß wirksam werden. Der Kopplungsanteil, welcher für $\mathfrak{V} = 0$ identisch verschwindet, bleibt auch in Fahrt unbedeutend gegen den Anteil der Tauchschwingung.

Die entsprechenden Widerstandsbeiwerte W_1 der erzwungenen Schwingung, berechnet nach Formel (28b) bzw. (32b), sind in Abb. 5a, b, c dargestellt. Hier erscheint der Koeffizient der Kopplung dem der Tauchschwingung in der Größe vergleichbar.

Die Widerstandsbeiwerte W der freien Schwingung in der Welle finden wir für den Quader auf Abb. 6a, b, c. Wiederum hat der Kopplungsterm die Größenordnung des Tauchschwingungs-

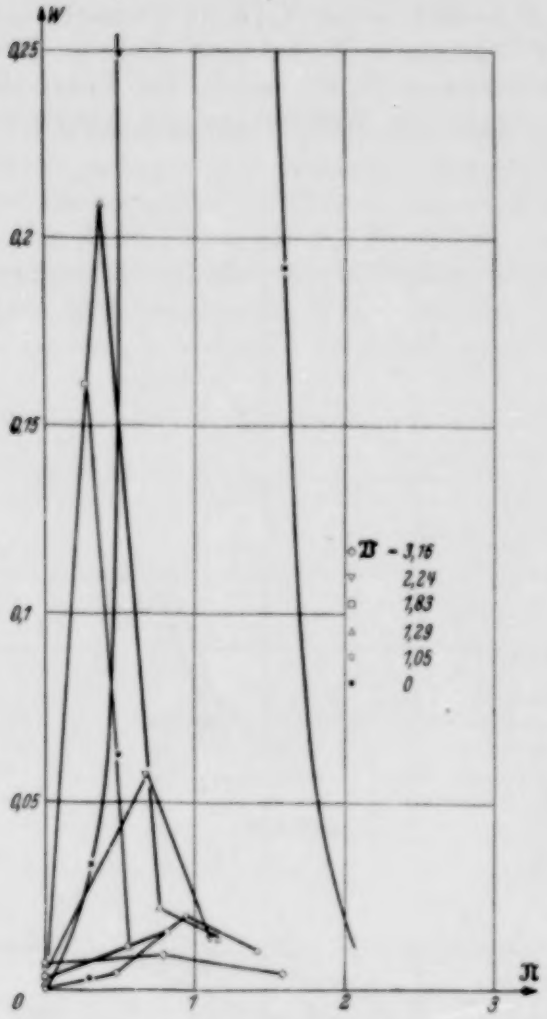


Abb. 6a.

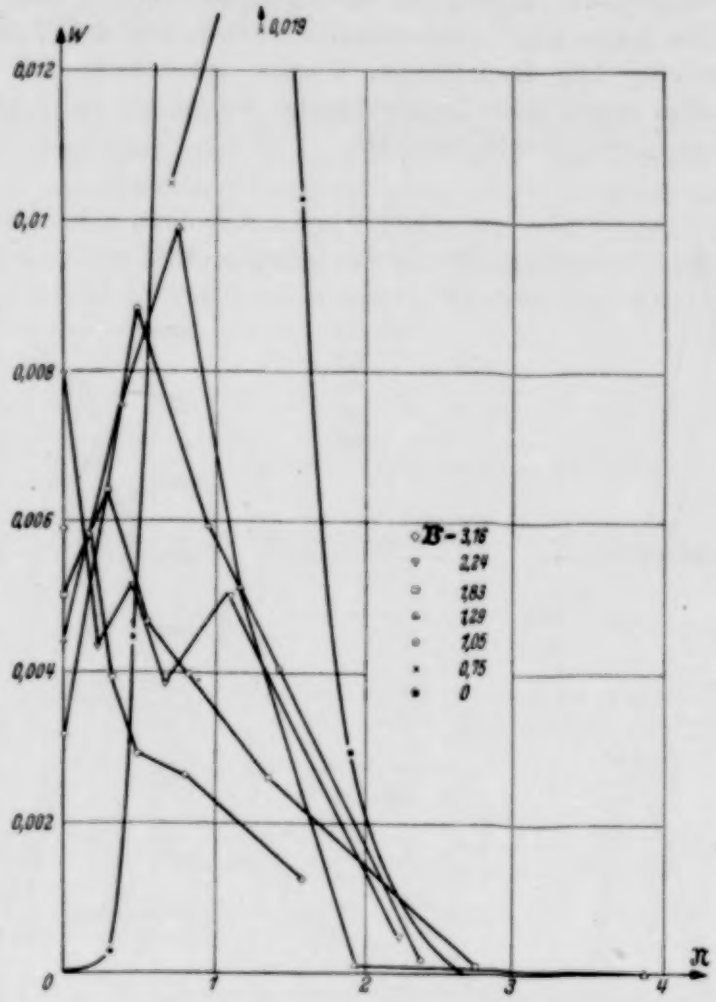


Abb. 6b.

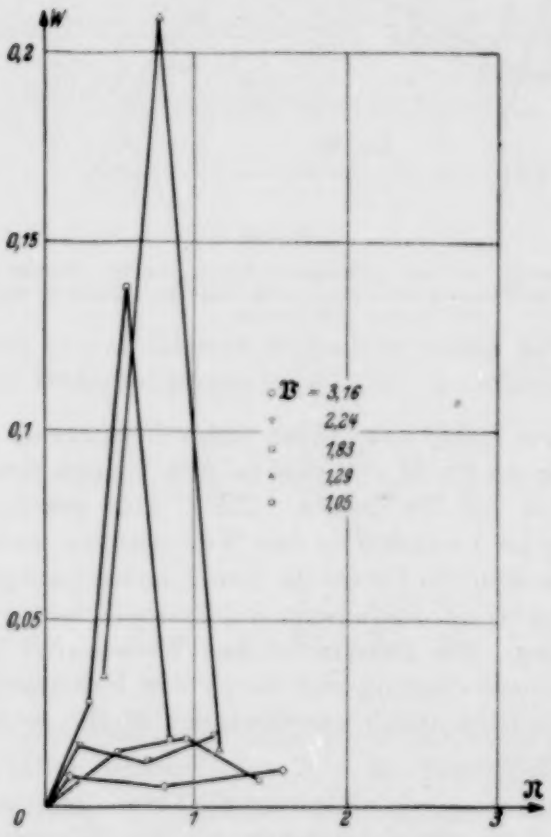


Abb. 6c.

Abb. 6a — c. Widerstandsbeiwert der freien Schwingung des schmalen Quaders in der Welle in Abhängigkeit von Frequenz und Fahrt. a) Tauchschwingung; b) Stampfschwingung; c) Kopplung.

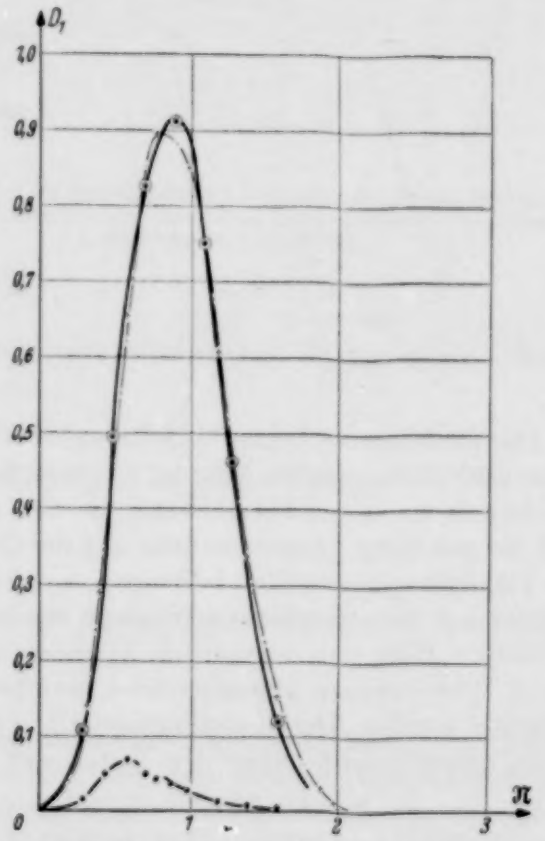


Abb. 7. Dämpfungsbeiwert D_1 in ruhendem Wasser ($\mathfrak{B} = 0$) in Abhängigkeit vom Frequenzparameter $\mathfrak{N}$. — + Einzelquelle (Unterer Teil der Kurve enthalten in Abb. 1a und 1b); ⊕ Tauchschwingung des Quaders (Unterer Teil der Kurve enthalten in Abb. 4a); • Stampfschwingung des Quaders (Kurve in größerem Maßstab enthalten in Abb. 4b).

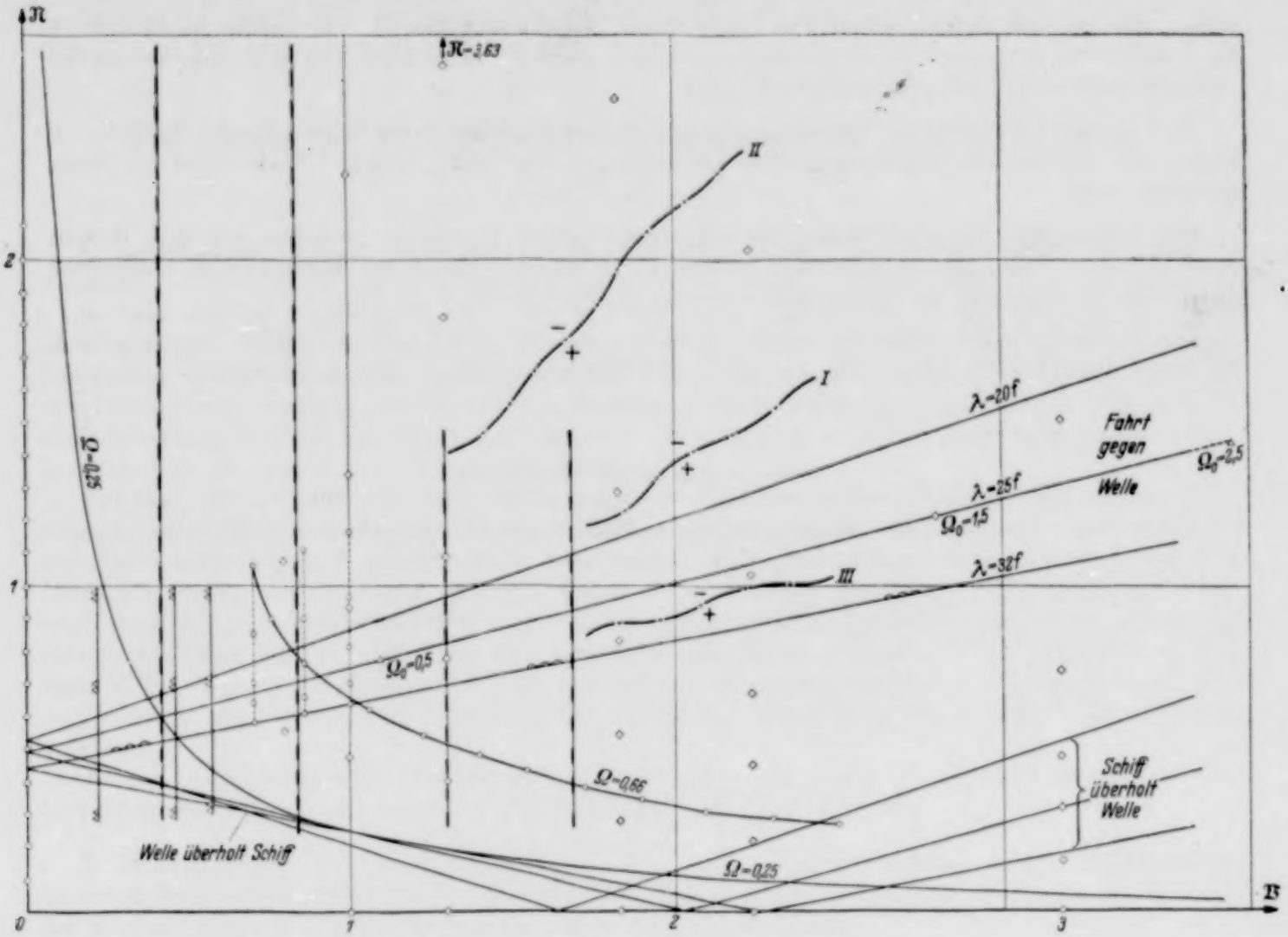


Abb. 8. Übersicht des untersuchten Frequenz- und Fahrtbereichs.

——•—— ($\lambda = 25f$) Bereich, in dem *Haskind* für *Michell*-Schiffe D_1 und W_1 berechnete unter Vernachlässigung der Dipolkorrektur*.

——•••—— ($\lambda = 32f$) Bereich, in dem *Maruo* die gesamte Widerstandserhöhung bei Fahrt gegen Wellenzug vorgegebener Höhe und dadurch angeregte Tauch- und Stampfschwingungen für eine Schiffsform berechnete, die er durch oszillierende Quellen in den Schwerpunkten der Spanten darstellte (** und Int. Shipbuilding Progress. 4 (1957) S. 477).

($\Omega = 0{,}66$) Bereich, in dem *Hanaoka* für ein *Michell*-Schiff in erzwungenen Stampfschwingungen D_1 und W_1 berechnete. (Vorgetragen auf Tankleiterkonferenz Oslo 1954.)

····◇····◇···· Bereiche, in denen *Hanaoka* experimentelle Messungen des Gesamtwiderstandes im Seegang vornahm. Die zugehörigen Berechnungen basieren auf der Annahme, daß der Beitrag des Seegangs zum Widerstand durch die Annahme einer wellenförmigen Verformung des Schiffskörpers erfaßt werden kann. Es ist hier $f = L/25$ angesetzt***.

——•••—— Bereiche, in denen *Havelock* für die Stampfschwingung (Singularitätenansatz nach unserer Formel (31a)) unter Vernachlässigung der Dipolkorrektur D_1 berechnete****.

— — — — Bereiche, in denen *Golovato* ***** für ein erzwungen stampfendes Modell D_1 experimentell ermittelte.

◇ Punkte, für die in der vorliegenden Arbeit W_1, D_1 und W berechnet wurden.

—·— $\frac{-}{+}$ —·— Errechnete Grenzen des Bereichs negativer Widerstandserhöhung W_1 in erzwungener Schwingung. I für Quelle; II für Quell-Dipol-Kombination; III für Stampfschwingung.

Symbole: $\mathfrak{N} = v\sqrt{f/g}$ = Frequenzparameter
$\mathfrak{V} = V/\sqrt{gf}$ = Fahrtparameter
$\Omega = \mathfrak{N}\mathfrak{V}$ = Brardscher Parameter
f = Tauchtiefe der Singularitäten bzw. Modelltiefgang.

---

* S. Fußnote S. 40
** S. Fußnote S. 40
*** S. Fußnote S. 39
**** S. Fußnote S. 39
***** S. Fußnote S. 40

terms, diesmal mit definit positivem Vorzeichen. Die Kurven für $\mathfrak{V} = 0$, welche in Abb. 6a, b 3a, b nicht voll ausgezeichnet sind, ergeben sich aus den Kurven in Abb. 7 nach Multiplikation der Ordinatenwerte mit $\mathfrak{N}^3$ gemäß Formel (24c).

In Abb. 8 finden wir zum Abschluß einen Überblick über die Bereiche von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{V}$, in denen bisher rechnerische und experimentelle Untersuchungen über Dämpfung und Widerstandserhöhung bekannt sind.

Die umfangreichen numerischen Berechnungen obiger Ergebnisse wurden von den Herren cand. *Jeremie*, *Böhm* und *Kleuters* am Institut für Schiffbau, Hamburg, durchgeführt, ermöglicht durch eine Zuwendung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Der Verfasser möchte hier seinen Dank aussprechen für diese sachliche Hilfe, ebenso jedoch an Herrn Prof. Dr. *Weinblum* für Anregung und Förderung obiger Untersuchungen.

(Eingegangen am 23. April 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr. rer. nat. Dipl.-Math. *Klaus Eggers*, Hamburg-Volksdorf, Horstlooge 16.

The plastic yielding of double notched bars due to pure bending

By George Lianis

1. Introduction. In a previous paper the author[1] has treated both theoretically and experimentally the problem of plastic bending of single notched bars. In the case of double notches, when pure bending is applied, the stress pattern and the plastic nucleii developed under the notch roots are exactly similar, with opposite signs, since, due to the symmetry, the upper half of the bar suffers as much in tension as the lower half suffers in compression. The two similar nucleii developed during the elastic-plastic stage of bending spread into the elastic material simultaneously with increasing bending until they join together. It is this value of the bending moment which is defined as the Yield or Collapse Moment.

For the yield moment a slip-line field is constructed for any shape of symmetrical notch. It is proved that this field does not involve anywhere negative rate of plastic work. A velocity field associated with this slip-line field can be constructed. The latter is consistent with the boundary kinematic conditions and the rigid-body motion of the assumed rigid parts. The moment calculated from the associated stress field is strictly an upper bound.[2] A suitable stress field satisfiying static conditions is also constructed by means of which a lower bound is calculated. The special cases of Rectangular, Trapezoidal, and V-notches with circular fillets are examined completely and lower bounds are found for V- and Circular notches for which *Green*[3] has found an upper bound solution.

In a series of experiments for the above shapes and various sizes it has been found that the measured constraint factor agrees satisfactorily with the upper bound.

2. Limit analysis. We are concerned here with initial motion problems only. It is therefore permissible to satisfy the boundary conditions on the undeformed boundary. A complete solution for a plane strain problem must satisfy the following conditions:

a) The equilibrium equations

$$\frac{\partial \sigma_x}{x\partial} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0\,. \tag{1}$$

b) The yield criterion throughout the plastic zone[4]

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2 = 4\,k^2 \tag{2}$$

where $k = Y/\sqrt{3}$, and $Y =$ the tensile yield stress.

c) The stress system in the plastic region must not cause violation of the yield criterion, equ. (2), in the rigid parts.

d) The flow rule must be satisfied by the strain system

$$\frac{\dot{e}_x^P - \dot{e}_y^P}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\tau_{xy}} \tag{3}$$

and the equation of incompressibility

$$\dot{e}_x^P + \dot{e}_y^P = 0 \tag{4}$$

in the plastic region.

e) The velocity field must determine in the rigid region rigid body motion.

f) The rate of plastic work must be positive everywhere in the plastic region.

g) Stress and velocity boundary conditions must be satisfied.

Any solution which does not satisfy but some of the above conditions is called incomplete solution. Incomplete solutions are sometimes useful to obtain bounds to the yield load.

---

[1] *G. Lianis* and *H. Ford*, J. Mech. Phys. Solids 7(1958) p. 1.
[2] *D. C. Drucker*, *H. J. Greenberg*, *E. H. Lee* and *W. Prager*, Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1952.
[3] *A. P. Green*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 6(1953) p. 223.
[4] Von *R. Mises*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Klasse (1913) p. 582.

We shall call a stress field **statically admissible** if it satisfies conditions a, b, c and g, and a velocity field **kinematically admissible** if it satisfies conditions d, e, f and g.

The following theorems have been formulated for the case of all surface tractions increasing proportionally[1]:

Theorem 1: The yield load is the largest between the loads for which a statically admissible field can be found.

Theorem 2: The yield load is the smallest between the loads for which a kinematically admissible field can be found.

A statically admissible stress field is described here by means of which a lower bound for the yield moment is found. The slip-line field theory on the other hand provides kinematically admissible velocity fields. In a material stressed plastically under conditions of plane strain the velocity and stress characteristics coincide at each point of the deformed region with the directions of the maximum shear stress (or shear strain)[2]. The two orthogonal families of characteristics in this case are called **slip-lines**. Let the two families be labelled by the parameters α and β respectively* (Fig. 1).

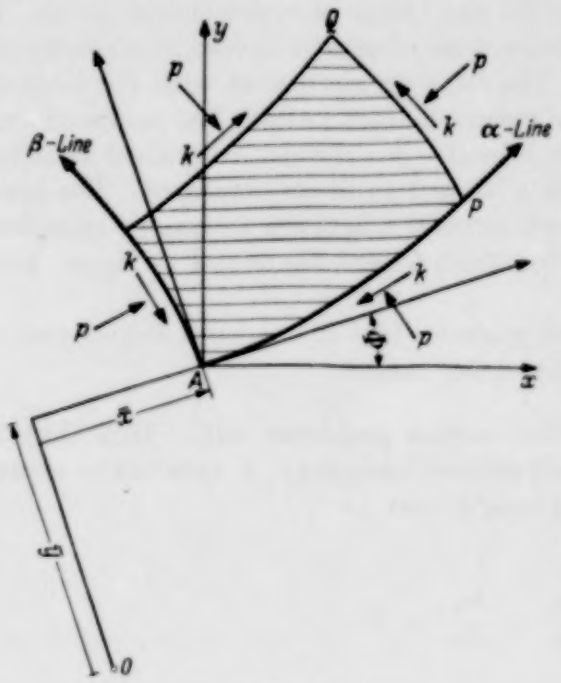


Fig. 1.

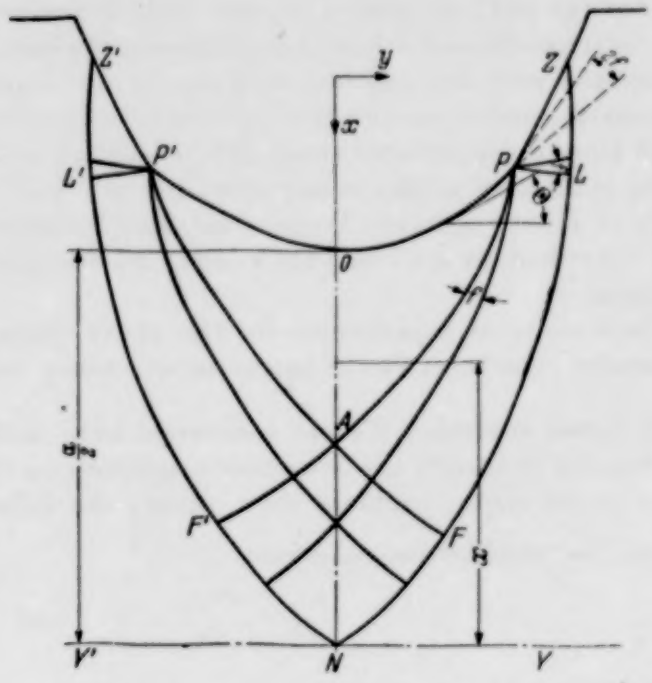


Fig. 2.

In a small element bounded by two pairs of α- and β-lines, $p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ is the normal stress on each face known as **hydrostatic pressure**, and k is the shear stress where $k = Y/\sqrt{3}$, Y = the yield stress in simple tension. The following equations known as *Henckys* **equations**[3] relate p with the angle φ of the slip-lines with a fixed system of axes of reference:

$$\left.\begin{aligned} p + 2k\varphi &= \text{const. along an } \alpha\text{-line}, \\ p - 2k\varphi &= \text{const. along a } \beta\text{-line}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

These equations are equivalent to the equations of equilibrium.

The velocity components u and v in the α- and β-directions respectively are related with the angle φ by *Geiringers* **equations**[4]

$$\left.\begin{aligned} du - v\,d\varphi &= 0 \text{ along an } \alpha\text{-line}, \\ dv + u\,d\varphi &= 0 \text{ along a } \beta\text{-line}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

A point in the slip-line field can be defined by the quantities $\bar{x}$ and $\bar{y}$. They are the co-ordinates of the point P (Fig. 1) referred to axes passing though some fixed point 0 and parallel to the

[1] See footnote 2 page 55.

[2] *R. Hill*, The mathematical Theory of Plasticity, p. 134. Oxford 1950.

* If the α- and β-directions are regarded as right-handed axes of reference the line of action of the algebraically greatest principal atress (σ_1 or σ_2) lies in the first and third quadrants.

[3] *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 3(1923) p. 241.

[4] *H. Geiringer*, Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm 1930, vol 2, p. 185.

respective slip-line directions at P (Fig. 1). The variation of $\bar{x}$ and $\bar{y}$ along the sliplines is given by the equations[1]

$$\left.\begin{aligned} d\bar{y} + \bar{x}\, d\varphi = 0 \text{ along an } \alpha\text{-line}, \\ d\bar{x} - \bar{y}\, d\varphi = 0 \text{ along a } \beta\text{-line}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

A solution based on a slip-line analysis satisfies the conditions a, b, d, e and g. If the rate of plastic work is everywhere positive the slipline field provides a kinematically admissible velocity field. The load calculated from the associated stress field is therefore an upper bound to the yield load.

3. General solution. a) Upper bound. 1.) *Slip-line-field; Solution I.* The construction of the slip-line field is based on the same method followed in the general case for single notches[2]. The notches are similar and symmetrical with respect to the bar axis $y' - y$ (Fig. 2). Pure bending is applied at the ends of the bar tend to open the upper notch. The stresses on the upper half will therefore be tensile and these of the lower half will be compressive. Apart from the sign both configurations must be similar due to the symmetry. The axis of the bar is therefore axis of Symmetry of the slip-line field.

The free surface of the notch defines as previously was sought the field in the domain $ZPLP'Z'L'F'NFLZ$ (Fig. 2). The field is extended until it reaches the bar axis $y' - y$ from both sides. The axis of the bar defines therefore the position of the end of the field Z at the notch surface.

The equilibrium conditions are identically satisfied in such symmetrical construction. The point N is a point of stress discontinuity. The validity of this solution depends on whether the yield criterion is violated at the corner of the rigid part of the bar near N. If Θ is the angle of a generic point on the notch surface with respect to y-axis, the slip-line angle on the notch will be

$$\varphi = \Theta + \frac{\pi}{4}.$$

Applying *Henckys* theorem, equ. (5), along ZN

$$-k - 2k\left(\Theta_Z + \frac{\pi}{4}\right) = p_N - 2k\frac{\pi}{4},$$

$$p_N = -k(1 + 2\Theta_Z).$$

In the compressive part on the other hand it is

$$p_N' = +k(1 + 2\Theta_Z).$$

The yield criterion is not violated at N if[3]

$$|\Delta p| = 2k(1 + 2\Theta_Z) \leqq k\pi$$

or

$$\Theta_Z \leqq \frac{\pi - 2}{4} = 16^\circ 20'. \tag{8}$$

The limiting values, of a, a_{limit}, corresponds to $\Theta_Z = 16^\circ 20'$. Plotting the normal stress σ_x applied across OAN and taking the moments with respect to N the yield moment M_Y is found

$$M_Y = 2\int_0^{1/2} \frac{\sigma_y}{k}\frac{x}{a}\, d\left(\frac{x}{a}\right) k a^2.$$

The Constraint Factor is defined in the following as the ratio of the yield moment of the notched bar to the yield moment of a uniform bar having the same thickness. The later according to the simple beam theory is equal to $ka^2/2$. Therefore:

$$L = \frac{2 M_Y}{k a^2} = 4\int_0^{1/2} \frac{\sigma_y}{k}\frac{x}{a}\, d\left(\frac{x}{a}\right), \tag{9}$$

where x the distance measured from the point N (Fig. 2).

2. *Slip-line field, Solution II.* If extending the field to reach the middle point N in Fig. 2 a point Z is found on the notch surface such that $\Theta_Z \geq \frac{\pi - 2}{4}$ in solution I, the yield criterion is violated

[1] See footnote 2 page 56.
[2] See footnote 1 page 55.
[3] *R. Hill*, J. Mech. Phys. Solids 2(1954) p. 278.

in some parts of the assumed rigid material. Another solution satisfiying the stress and velocity boundary conditions and holding for values of the minimum bar thickness greater than a_{limit} is shown in Fig. 3. This solution yields lower values for the constraint factor than solution I.

The field is extended as before until the point Z having $\Theta_Z = (\pi - 2)/4$ is reached and extended further to the left and to the right as before (regions $ZTEN, Z'T'E'N$ in Fig. 2). The two domains joint together by the circular arcs EE_1 and $E'E_1'$, forming a central hinge. These arcs have radius R and centres K_1 and K_2 lying on the axis of symmetry of the bar $y' - y$. The stresses on points P, P_1, lying on the boundary of the hinge symmetrically to $y - y'$ have equal and opposite projections in the y-direction and therefore the equilibrium condition is identically satisfield.

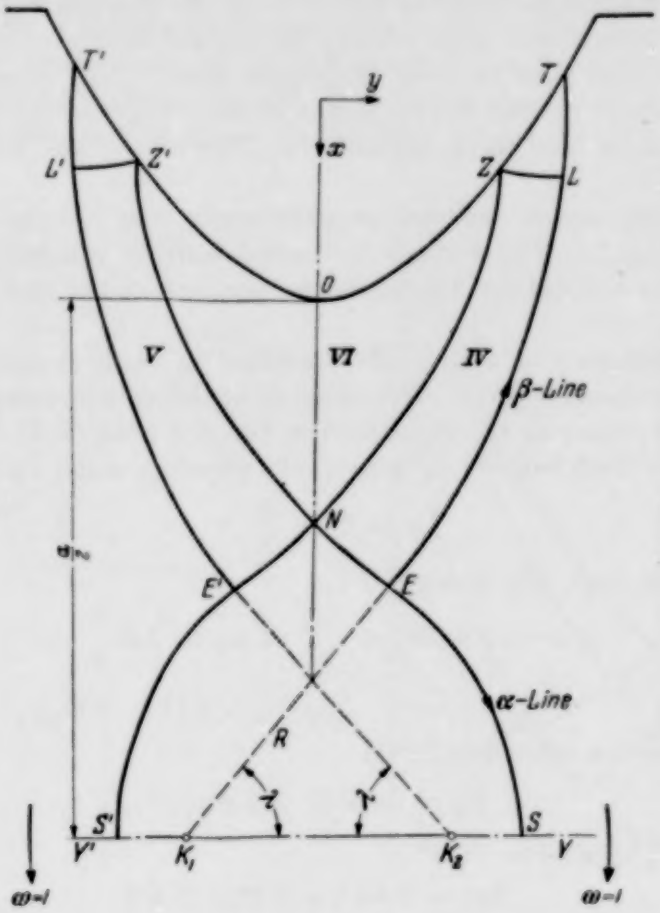


Fig. 3.

The second equilibrium condition (in the x-direction) along $ONEE_1N_1O_1$ and the fact that K_1K_2 lie on the $y' - y$ axis define the two unknowns of the problem, namely the hinge radius R and the position of the end points T, T', T_1, T_1'. Analytical expresions to these two requirements will be given in the special cases examined in the next paragraphs.

Once the field has been fixed the constraint factor can be evaluated by taking the moments of the stresses distributed along $ON\binom{N}{M}{0}$, $NE\binom{E}{M}{N}$, and $ES\binom{S}{M}{E}$

$$L = \frac{4\left(\overset{N}{\underset{0}{M}} + \overset{E}{\underset{N}{M}} + \overset{S}{\underset{E}{M}}\right)}{k\,a^2}. \tag{10}$$

The hydrostatic pressure at the points S and S_1 is zero as one can see by applying *Henckys* equation (5) along ZN and NS

$$-k - 2k\left(\frac{\pi - 2}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = p_N - 2k\,\frac{\pi}{4}, \quad p_N = -k\,\frac{\pi}{2}$$

$$-k\,\frac{\pi}{2} + k\,\frac{\pi}{2} = p_S + 2k\,x\,0,$$

and therefore

$$p_S = 0.$$

3) *Velocity field* (*Fig. 4*). Let us examine the velocity field (Hodograph) for solution II. The rigid parts rotate around K_1 and K_2 respectively with an angular velocity ω. For simplicity we take $\omega = 1$ without loss of generality. If now a velocity field associated with the slip-line field is found such that it satisfies the boundary conditions and does not involve negative plastic work anywhere in the deforned region (condition *f*) the load given by the slip-line field is an upper bound for the yield load. Such a field is shown in Fig. 4. The Hodograph for points of the regions I and II along ES and $E'S'$ consists of circular arcs of radius R (since $\omega = 1$) with the pole as a centre, and angular span λ. Along ELT: If K_1 is taken as the origin then due to the continuity of the normal velocity along ELT and the fact that $\omega = 1$ it follows from Figs. 3 und 4b: $u = \bar{y}$ and therefore from equs. (6) and (7) $v = -\bar{x}$. Therefore the image of ELT in the Hodograph plane is a similar curve rotated through 90°.

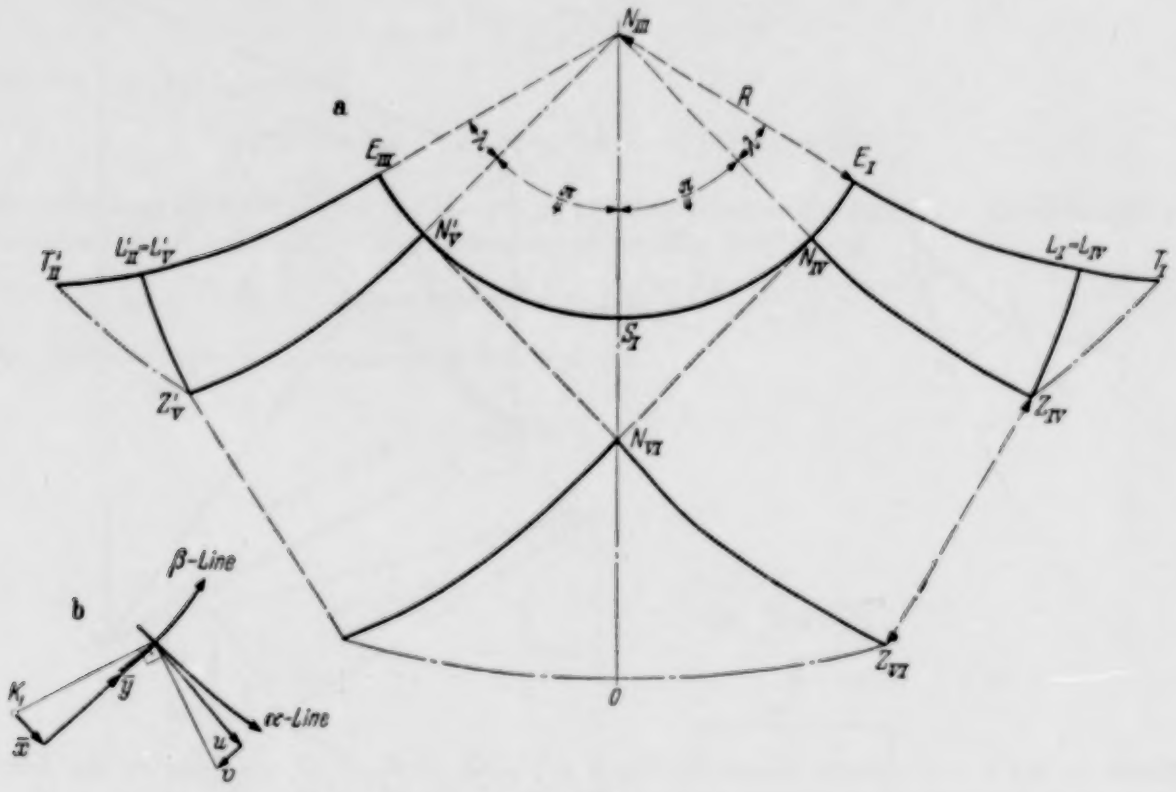


Fig. 4.

Along NE: From the continuity of the normal velocity it follows $v = 0$. Applying *Geiringers* equ. 6 we find along NE, and NE' $u = \text{const.} = u_E = R$. The jump of the tangential velocity along these lines must remain constantly equal to R[1], their images in the Hodograph plane being circular arcs of angular span $\lambda - \pi/4$. Once the normal velocities along NE and EL are known the Hodograph in $NELZ$ can readily be constructed[1]. Having the distribution of the normal components of the velocity along ZL and ZT from the above construction the Hodograph in the region ZLT can be drawn. On either side of NZ and NZ' thereis a tangential descontinuity of amount R since $u = 0$ at N_{IV} and $u = R$ at N_{VI}. ($\Delta u = R$ and this jump must remain constant along NZ). $(NZ)_{VI}$ and $(NZ')_{VI}$ being known in the Hodograph, the velocity field in $(NZZ')_{VI}$ can be constructed and extended to meet the boundary ZOZ'.

The Hodograph of the lower part of the field is exactly similar to that of the upper part. We shall now give a proof of the following general statement:

For a concave upwards notch having monotonically increasing tangent direction (with possible discontinuities) the stress and the velocity system of Figs. 3 and 4 cause nowhere in the plastic region negative rate of plastic work.

If s_α and s_β are the legth of the arc element along α- and β-lines respectively the corresponding curvatures $1/R$ and $1/S$ are given by

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha}, \qquad \frac{1}{S} = \frac{-\partial \Phi}{\partial s_\beta} \tag{11}$$

[1] See footnote 1 page 55.

and the rate of plastic work per unit of volume is

$$\dot{w} = \frac{\partial u}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v}{\partial s_\alpha} + \frac{v}{S} + \frac{u}{R} \,. \tag{12}$$

Green[1] has shown that if R' and S' are the radii of curvature of the images of α- and β-lines in the Hodograph plane

$$\dot{w} = k\left(\frac{S'}{S} - \frac{R'}{R}\right). \tag{13}$$

If by examining the form of the slip-line field and the velocity field S'/S and $-R'/R$ are found to be of the same sign, the sign of $\dot{w}$ may be found without any laborious calculation of the curvature using equ. (13). In Fig. 3 the angle Φ increases everywhere in the positive β-direction.

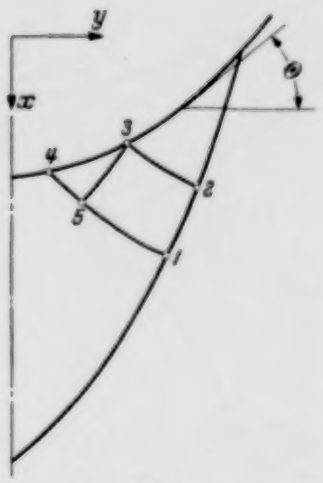


Fig. 5.

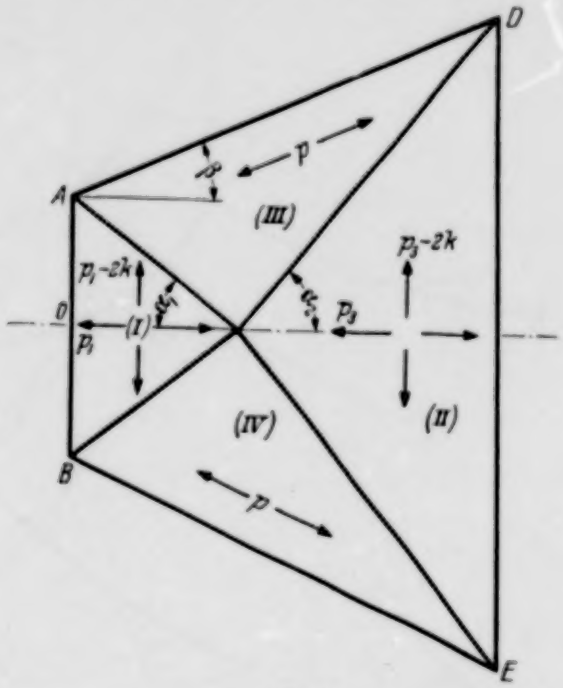


Fig. 6.

Because in the $x-y$ system shown in Fig. 5 $\Phi_2 - \Phi_1 = \Phi_3 - \Phi_5$ and due to the fact that the boundary 4—3 is principal direction trajectory: $\Phi_5 = 1/2\,(\Phi_3 + \Phi_4)$. Hense: $\Phi_2 - \Phi_1 = 1/2\,(\Phi_3 - \Phi_4)$. But on the notch surface $\Phi = \pi/4 + \Theta$ and therefore: $\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{1}{2}(\Theta_3 - \Theta_4)$, Since Θ is increasing it follows that $\Phi_2 \geq \Phi_1$. Consequently:

$$\frac{1}{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_\beta} \leqq 0 \,. \tag{a}$$

For the same reason Φ increases along α-lines. Therefore:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} \geqq 0 \,. \tag{b}$$

Since in both lines Φ increases they are both concave upwards. We have seen that the boundaries $E\,L\,T$ (β-line) and $E'\,L'\,T'$ (α-line) have similar images in the Hodograph plane rotated through 90° in the direction of rotation of the relevant rigid parts of the bar. Their images are therefore concave to the right and to the left respectively, and so are all the other lines of the two domains. Therefore the curvatures of the Hodograph are

$$\frac{1}{R'} = \frac{\partial \Phi'}{\partial s'_\alpha} \leqq 0 \,, \tag{c}$$

$$\frac{1}{S'} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial s'_\beta} \leqq 0 \,, \tag{d}$$

From (a), (b), (c) and (d) it follows

$$\frac{S'}{S} \geqq 0 \qquad \text{and} \qquad -\frac{R'}{R} \geqq 0 \,.$$

[1] See footnote 3 page 55.

Therefore everywhere in the plastic region $\dot{\gamma} \geqq 0$ and $\dot{w} \geqq 0$. The sign of the work of the instantaneous shear done as an element crosses a velocity discontinuity must be found separately using equ. (12). Since as we cross NZ moving in the positive α-direction the jump of v is positive:

$$\Delta v = + R\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = + \infty$$

and therefore $\dot{\omega} = + \infty$ and so it is along NE', NE_1, and NE_1'.

The above proof holds for solution I as well, where the points N, E, S, E_1, E_1', S_1' and E' coincide with the neutral point N. The field remains unaltered in the regions NZZ' and NZ_1Z_1', N in the Hodograph coincides with the pole and the discontinuity R disappears.

b) Lower bound. 1) *Stress field.* Consider a trapezoidal stress field (Fig. 6). Equilibrium along the discontinuity AC leads to

$$p_1 = k\,[\sin^2\alpha_1 \tan(\alpha_1 + \beta) + 2\cos^2\alpha_1]\,, \tag{14}$$

$$p_2 = 2\,k\,\frac{\sin 2\,\alpha_1}{\sin 2\,(\alpha_1 + \beta)} \leqq 2\,k\,. \tag{15}$$

Equilibrium along CD leads to

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1\,, \qquad p_3 = 2\,k \sin\alpha_1\,(\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1)\,. \tag{16}$$

If we superimpose the field in region III with $p_2 \geqq 0$ (tension) on the field in region IV with $p_2 \leqq 0$ (compression) the resultant field is one of pure shear (Fig. 6):

$$\tau_{xy} = p_2 \sin 2\,\beta = 2\,k\,\frac{\sin 2\,\alpha_1 \sin 2\,\beta}{\sin 2\,(\alpha_1 + \beta)}\,. \tag{17}$$

The yield criterion is not violated in this region if

$$\frac{\sin 2\,\alpha_1 \sin 2\,\beta}{\sin 2\,(\alpha_1 + \beta)} \leqq 1\,. \tag{18}$$

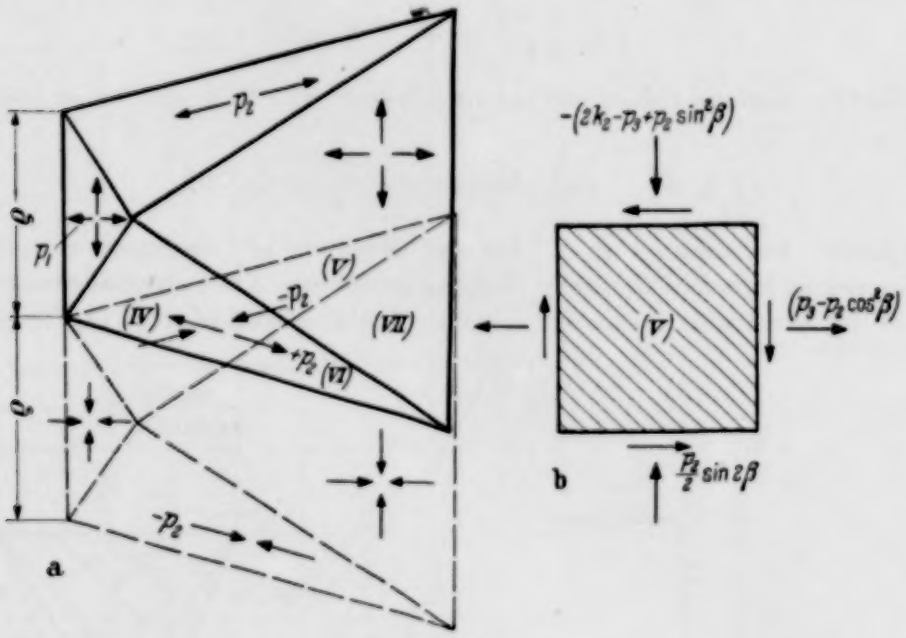


Fig. 7.

Let us now combine the field of Fig. 6 with a similar field having $p_1 =$ compressive as shown in Fig. 7a. In the region IV the yield criterion is not violated if equ. (16) holds. The stress components in region V are indicated in Fig. 7a. The yield condition is not violated in this region if

$$\frac{1}{4}\,(2\,k - p_2\cos 2\,\beta)^2 + \frac{p_2^2}{4}\cos^2 2\,\beta \leqq k^2$$

or

$$\cos 2\,\beta \geqq \frac{P_2}{4\,k} = \frac{\sin 2\,\alpha_1}{2\sin 2\,(\alpha_1 + \beta)}\,. \tag{19}$$

If we plot inequalities (15), (18) and (19), the region in which (14) holds can be found. In this region and for double slits on the bar we find

$$L_{lower} = \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \tan(\alpha_1 + \beta) + \cos^2\alpha_1$$

and this becomes maximum for

$$\beta = 15^\circ\,, \quad \alpha_1 = 37.5^\circ\,, \quad (L_{lower})_{max} = 1.26\,.$$

Because the upper bound is for this case 1.38 the mean value of the constraint factor will be equal to 1.32 with $\pm 4.5\%$ error. The present analysis will be employed to obtain bounds for various shapes of notches. Inequalities (15), (18), (19) together with equations (14) and (17) are simultaneously satisfied if

$$\beta_0 \leqq 15^\circ\,, \qquad \alpha_1 \geqq 31.5^\circ\,, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1\,.$$

The constraint factor has maximum value when

$$\beta \leqq 15^\circ\,, \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\,, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\,. \tag{20}$$

From Fig. 7a and equ. (14) and (20) it follows

$$p_1 = 2\,k\,(1 + \sin\beta)\,, \tag{21}$$

$$L_{lower} = 4\,\frac{\varrho^2}{a^2}\,(1 + \sin\beta)\,; \tag{22}$$

$\beta \leqq 15^\circ$ has a value to maximise L_{lower}, and it is calculated from the equation

$$\frac{\varrho}{\alpha}\cos\beta + \frac{d\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)}{d\beta}\,(1 + \sin\beta) = 0\,. \tag{23}$$

4. Rectangularly notched bars. a) Upperbound, Solution I. 1) *Slip-line field.* Since the configuration is symmetrical with respect to the central axis it is sufficient to examine one half of the field (Fig. 8). The field is extended around the singularities Z, Z' by circular fans of radius $b\sqrt{2}$. The field in the region $ABNB'$ is constructed easily. The angle (f) is defined by the condition that the field is completed on the axis of the bar $y - y'$.

From equ. (1) it follows

$$f \leqq \frac{\pi - 2}{4} = \Phi_1 = 8^\circ\,10'\,. \tag{24}$$

By drawing the field for various values of f between 0 and $(\pi - 2)/8$, c/a can be found. This solution is valid for

$$f \leqq \Phi_1 \quad \text{and therefore} \quad \frac{2\,b}{a} \geqq 0.770\,.$$

2) *Constraint factor.* For each value of $2\,b/a$ and therefore of f the stress distribution along AN is calculated by means of *Henckys* theorem. Taking moments of the stresses along AN with respect to N the values of the constraint factor have been calculated and plotted in Fig. 10.

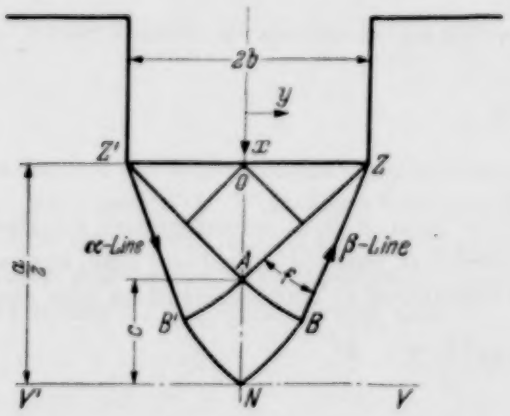


Fig. 8.

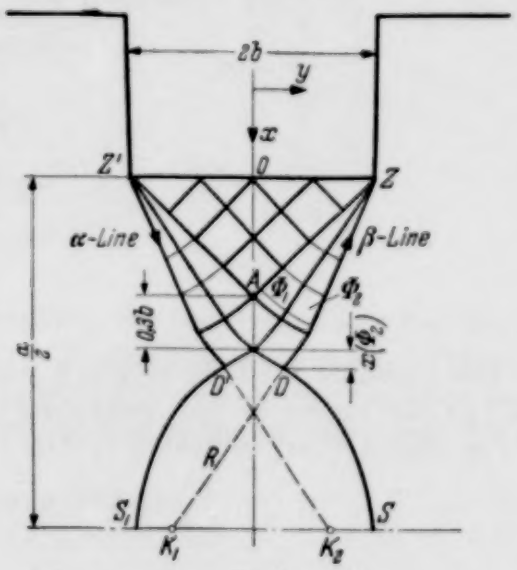


Fig. 9.

b) Upper bound, Solution II. 1) *Slip-line field.* In Fig. 9 one half of the slip-line field representing this solution is sketched. The angle Φ_1 remains constant for the various ratios $2\,b/a$ given by equ. (24). This is a consequence of *Henckys* theorem and the fact that the hydrostatic pressure at S is zero.

The equilibrium condition in the y-direction is identically satisfied due to the symmetry. The equilibrium condition along $OANDS$ in the x-direction leads to

$$\frac{R}{a\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-1+2\,\Phi_2\right)\cos\Phi_2-\left(\frac{\pi}{2}+1+2\,\Phi_2\right)\sin\Phi_2\right]=\frac{\int_N^D X\,d\left(\frac{s}{a}\right)}{k}. \tag{25}$$

Since K_1 and K_2 lie on the axis $Y'-Y$ it follows from Fig. 7

$$\frac{R}{a}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\Phi_2\right)=\frac{1}{2}-1.3\,\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\,(\Phi_2)\,\frac{b}{a}\,, \tag{26}$$

where $x(\Phi_2)$ is evaluated by drawing the slip-line field. From equations (25) and (26) the two unknowns of the field, R/a and Φ_2 in terms of $2\,b/a$ can be found. Since

$$\int_N^D X\,d\left(\frac{s}{\alpha}\right)\leqq 0$$

for any value of Φ_2 the L. H. S. of equ. (25) must be positive. Therefore:

$$\tan\Phi_2\leqq\frac{\frac{\pi}{2}-1+2\,\Phi_2}{\frac{\pi}{2}+1+2\,\Phi_2}\,, \tag{27}$$

$$0\leqq\Phi_2\leqq 21^\circ 50'\,.$$

For $\Phi_2=21^\circ\,50'$, $2\,b=0$ and the notch becomes a slit.

2) *Constraint factor.* By taking the moments of the stresses distributed along $OANDS$ with respect to K_1 and by means of equ. (3) the constraint factor has been calculated and plotted in Fig. 10.

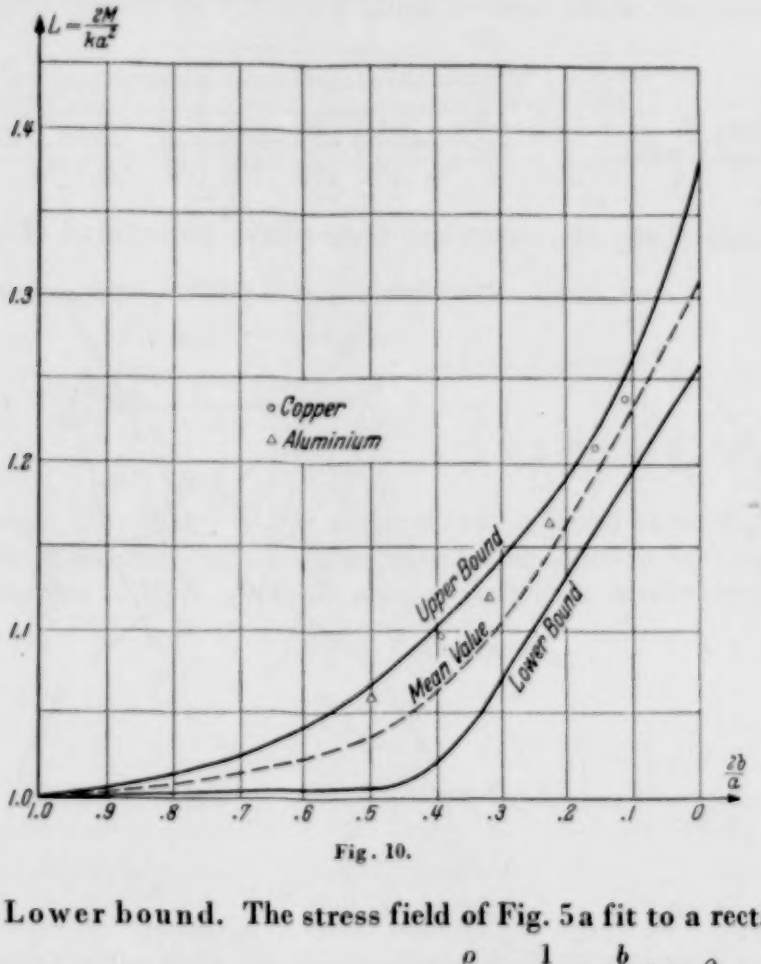


Fig. 10.

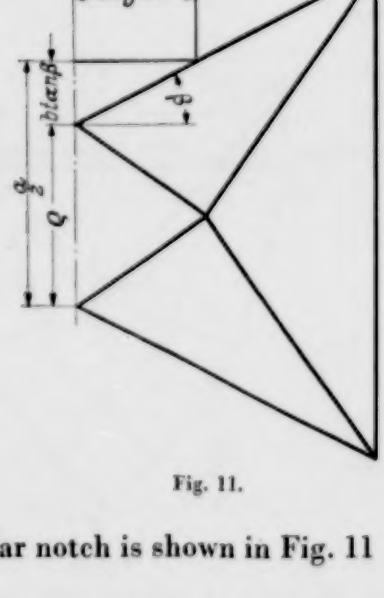


Fig. 11.

c) Lower bound. The stress field of Fig. 5a fit to a rectangular notch is shown in Fig. 11

$$\frac{\varrho}{a}=\frac{1}{2}-\frac{b}{a}\tan\beta\,.$$

The lower bound for the constraint factor takes the form

$$L_{lower}=4\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{a}\tan\beta\right)^2(1+\sin\beta)\,; \tag{27}$$

β is found from equ. (13) which takes the form

$$\cos\beta + \cos\beta \sin\beta + \tan\beta = \frac{1}{2\,b/a} \tag{28}$$

and

$$\beta \leqq 15^\circ .$$

Both bounds with a mean value curve are plotted in Fig. 10.

5. Trapezoidally notched bars. a) Upper bound, Solution I. 1) *Slip-line field.* N is the neutral point where a stress discontinuity occurs. Again:

$$f \leqq \frac{\pi - 2}{8} .$$

By means of *Henckys* theorem along ABC and $CMPL$ we find

$$f = \frac{\pi - 2\gamma}{4} . \tag{29}$$

Therefore solution I holds for

$$\frac{\pi + 2}{4} \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad 13^\circ\,10' \leqq \gamma \leqq 90^\circ . \tag{30}$$

The condition that $d \geqq 0$ further restricts γ for each value of $2b/a$. Since c/a is a function of f and therefore of γ, d/a can be found from Fig. 12

$$\frac{d}{a}\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} - \frac{\varkappa(f)}{b}\,\frac{b}{a} . \tag{31}$$

For $d/a \geqq 0$

$$\frac{2\,b}{a} \leqq \frac{1}{1 + \dfrac{\varkappa(f)}{b}} . \tag{32}$$

2) *Constraint factor.* Taking the moments of the stresses along $OADN$ with respect to N and integrating: (Fig. 12)

$$L_{upper} = \frac{2\,M}{k\,a^2} = 4\left[\frac{\sigma_D}{k}\,\frac{d^2}{a^2} + \int_{d/a\sqrt{2}}^{\frac{d}{a}\sqrt{2} + \frac{\varkappa(f)}{a}} \frac{\sigma_y}{k}\,\frac{\varkappa}{a}\,d\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right] . \tag{33}$$

Calculating the integral of equ. (33) numerically the constraint factor have been found (Fig. 14).

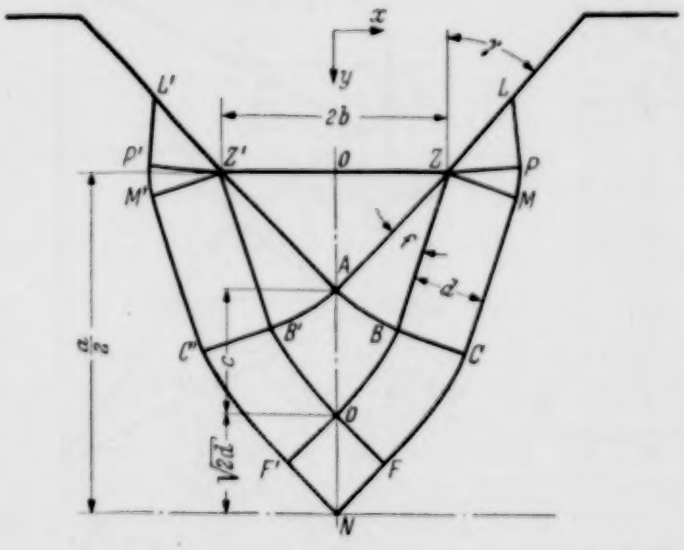


Fig. 12.

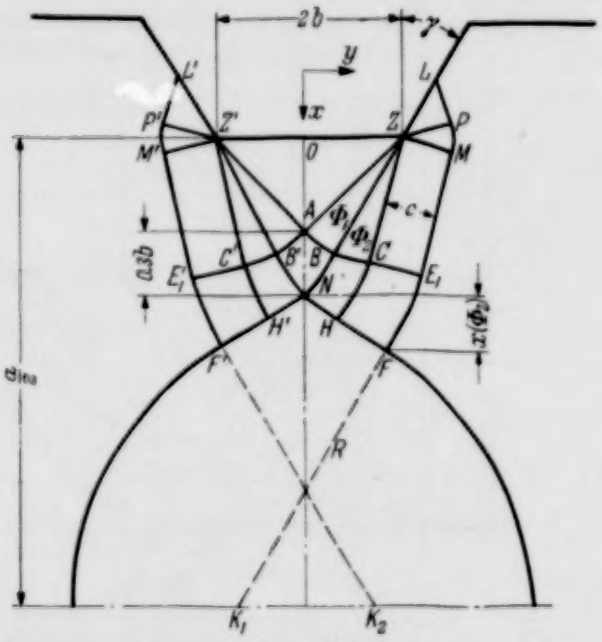


Fig. 13.

b) Upper bound, Solution II. 1) *Slip-line field.* When $\gamma \leqq 13^\circ\,30'$ a central hinge is developed. The upper and lower region are similar having their centres on the bar axis. Applying *Henckys* theorem the angle Φ_1 is found: $\Phi_1 = (\pi - 2)/8$. This value gives zero hydrostatic pressure in S and S_1.

Applying *Henckys* theorem along $ABCE$:

$$\Phi_2 = \frac{\frac{\pi}{2} - 2\gamma + 1}{4}. \tag{34}$$

Due to the symmetry the equilibrium condition in the o-y-direction is identically satisfied. From the fact that $K_1 K_2$ lies on the central axis of the bar it follows (Fig. 13)

$$\frac{1}{2} - 1.3\,\frac{b}{a} - \frac{\varkappa(\Phi_2)}{b}\,\frac{b}{a} - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \Phi_2\right) = \frac{R}{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \Phi_2\right). \tag{35}$$

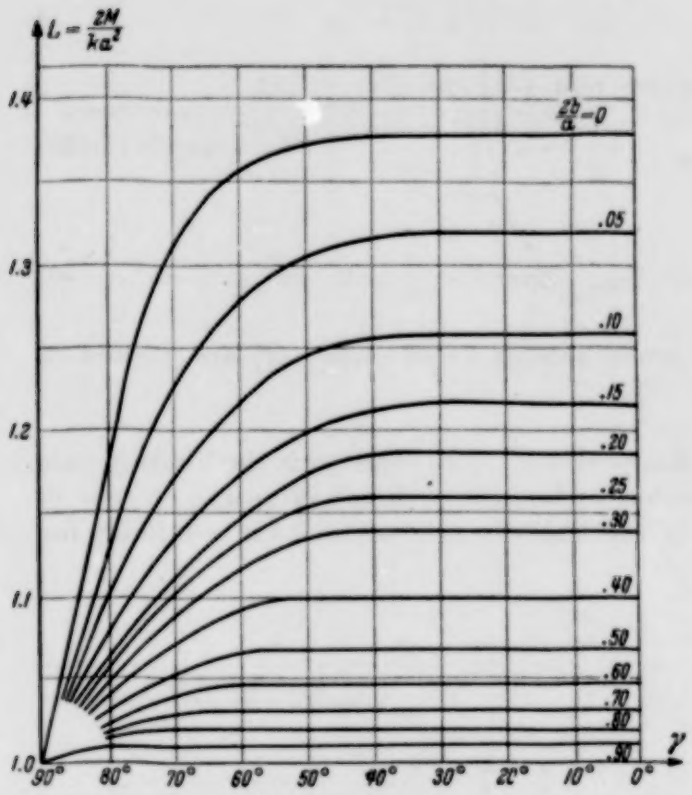


Fig. 14.

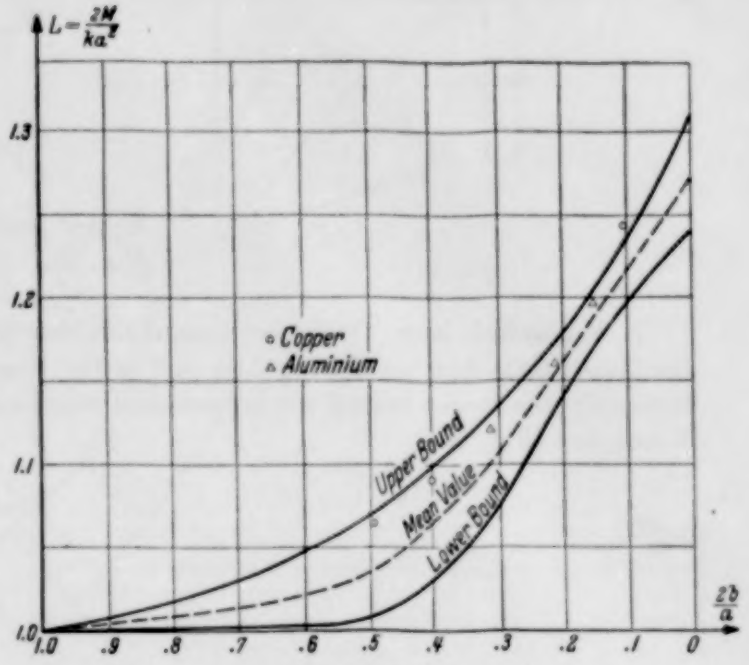


Fig. 15.

Equilibrium along $NHFS$ in the x-direction leads to

$$-\int_{NH} \frac{X}{k}\frac{ds}{b}\frac{b}{a} = \frac{R}{a\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\,\Phi_2\right)\cos\Phi_2 - \left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2\,\Phi_2\right)\sin\Phi_2\right]$$
$$-\frac{c}{a\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\,\Phi_2\right)\cos\Phi_2 + \left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2\,\Phi_2\right)\sin\Phi_2\right]. \tag{36}$$

From equ. (35) and (36) R/a and c/a can be found since Φ_2 is known from (34). The restriction that $c/a \geqq 0$ defines the range in wjhich this solution is valid.

Since the L. H. S. of (36) is always positive it is necessary that

$$\frac{R}{a\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\,\Phi_2\right)\cos\Phi_2 - \left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2\,\Phi_2\right)\sin\Phi_2\right] \geqq 0$$

or

$$\tan\Phi_2 \leqq \frac{\frac{\pi}{2} - 1 + 2\,\Phi_2}{\frac{\pi}{2} + 1 + 2\,\Phi_2} \tag{37}$$

or

$$0 \leqq \Phi_2 \leqq 21.8^\circ, \qquad 73^\circ\,30' \leqq \gamma \leqq 30^\circ.$$

Decreasing γ the field remains unchanged, if $2b/a$ is kept constant, and similar to that for rectangular notches.

2) *Constraint factor.* By numerical integration of the moment of the stresses distributed along $OANHFS$ the constraint factor has been calculated and plotted in Fig. 14. For $\gamma = 50^\circ$ and various values of $2\,b/a$ the constraint factor with experimental points are shown in Fig. 15.

c) Lower bound. The lower bound is equal to that calculated for rectangular notches (equ. 27) wherever $\gamma \leqq \pi/2 = \beta$, otherwise the side of the stress trapezoid coinsides with the oblique face of the notch, $\beta = \pi/2 - \gamma$, and the lower bound of the constraint factor is given by

$$L_{lower} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{a} - \cot\gamma\right)^2 (1 + \cos\gamma). \tag{38}$$

6. Circular notches. An upper bound for circularly notched bars has been found by *Green*[1]. A lower bound is shown in Fig. 16:

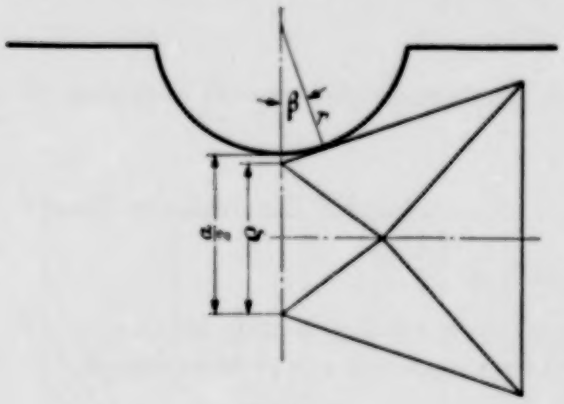


Fig. 16.

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{1}{2} - \frac{r}{a}\left(\frac{1 - \cos\beta}{\cos\beta}\right).$$

Substituting into equ. (21) and (22) we get

$$L_{lower} = 4\left[\frac{1}{2} - \frac{r}{a}\left(\frac{1 - \cos\beta}{\cos\beta}\right)^2 (1 + \sin\beta)\right] \tag{39}$$

and

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{a}\right)\cos^3\beta - \frac{r}{a}\cos^2\beta - \frac{r}{a} = 0 \quad \text{or} \quad \beta \leqq 15°. \tag{40}$$

Upper and lower bounds versus $a/(a + r)$ are plotted in Fig. 17.

7. V-notched bars. An upper bound solution is due to *Green*[1]. The solution is the limiting case for trapezoidal notches having $2b/a = 0$ or for V-notches with circular fillets having $a/(a + r) = 0$. Similarly the lower bound for trapezoidal notches in the limiting case where $2b/a = 0$ holds for V-notches (Fig. 18).

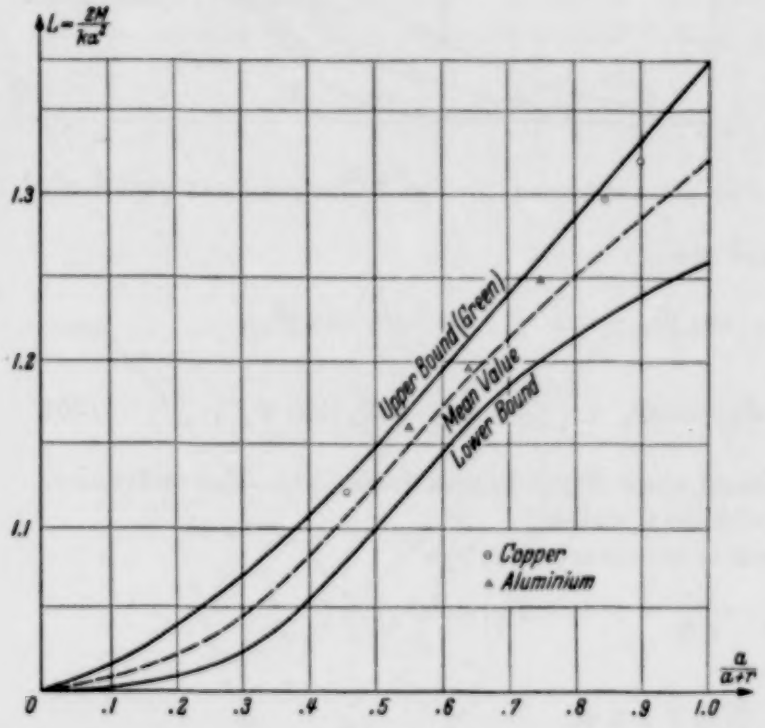


Fig. 17.

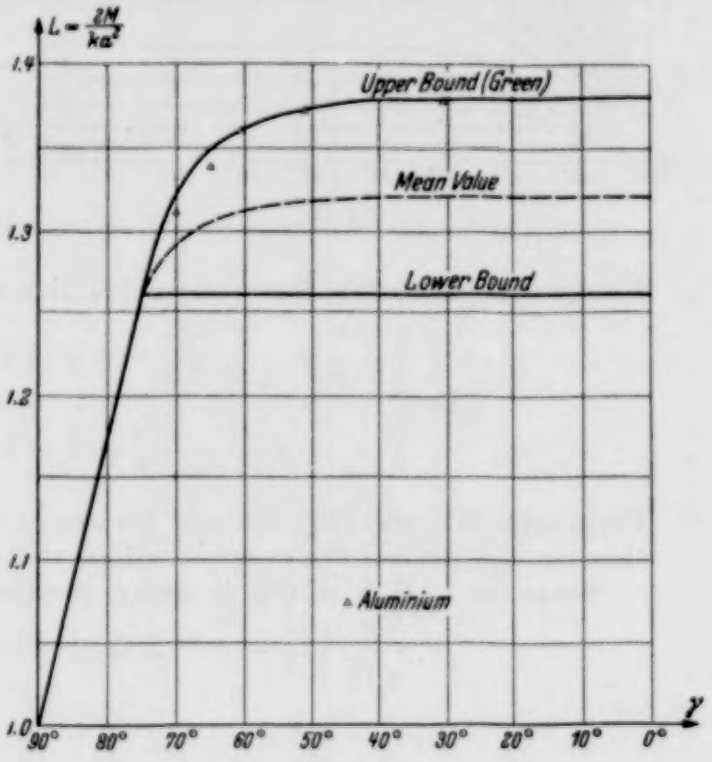


Fig. 18.

8. V-notches with circular fillets. a) Upper bound, Solution I. 1, *Slip-line field.* The field consists of logarithmic spirals in the region $Z'OZA$ (Fig. 19), having polar equations

$$d = r\,e^{\omega}, \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \gamma. \tag{41}$$

The region $AZEF$ consists of one family of straight lines and their orthogonal trajectories whilst the region ZLE, $Z'L'E'$ and $AFF'N$ are subjected to uniaxial tension. At the newtral point N

[1] *A. P. Green*, see footnote 3 page 55.

there is a stress discontinuity. From equ. 1 it follows

$$\gamma \geqq \frac{\pi + 2}{4} = 73.6^\circ . \tag{42}$$

The unknown quantities to fix the field are ψ determined from equ. (42) and c/a. From the geometry of Fig. 19 it follows

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{r}{a\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-\gamma} - 1\right). \tag{43}$$

In order to be $c/a \geqq 0$,

$$\frac{r}{a} \leqq \frac{1}{2\left(e^{\frac{\pi}{2}-\gamma} - 1\right)}. \tag{44}$$

Therefore the present solution is valid in that region of the $r/a, \gamma$ plane where both inequalities (42) and (44) are satisfied.

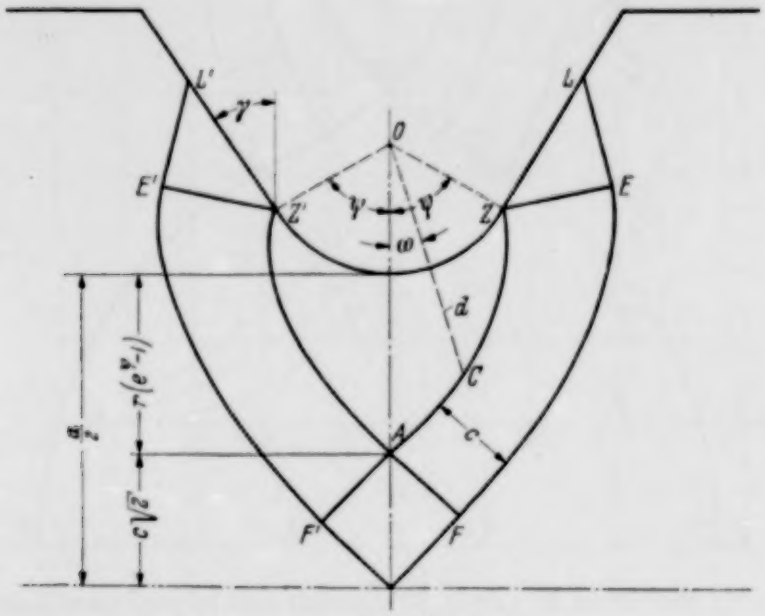


Fig. 19.

2) *Constraint factor.* The bending moment is equal to twice the moments of the stresses distributed along OAN with respect to N. By taking these moments the final expression for the constraint factor is

$$L_{upper} = (1 + \psi) - \frac{4r}{a}(e^{\psi} - 1 - \psi) + \frac{2r^2}{a^2}(e^{2\psi} + 2\psi - 4e^{\psi} + 3). \tag{45}$$

b) Upper bound, Solution II. 1) *Slip-line field.* When $\gamma \leqq (\pi + 2)/4 = 13.6^\circ$ a central hinge is developed, (Fig. 20). From *Hencky*s theorem applied along BA and $ACFS$ and the fact that $p_{s=0}$ it follows

$$\psi_1 = \frac{\pi - 2}{4} = 16.35^\circ , \qquad \psi_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma . \tag{46}$$

To fix the field the two unknowns must be evaluated. From the geometry of the field, (Fig. 20), it follows

$$\frac{c}{a}\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1 + 2\psi_2}{4}\right) + \frac{R}{a}\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1 + 2\psi_2}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{r}{a}\left[e^{\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}}\cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) - 1\right]. \tag{47}$$

Another equation is found from the condition of equilibrium along $ACFS$ in the x-direction. (The equilibrium in the y-direction is identically satisfied.) This leads to

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1 + 2\psi_2}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1 + 2\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1 + 2\psi_2}{4}\right)\right] \\
&+ \frac{R}{a}\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1 + 2\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1 + 2\psi_2}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1 + 2\psi_2}{4}\right)\right] \\
&= \frac{r}{a}e^{\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}}\left(\frac{\pi}{4} + \psi_2 - \frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{48}$$

From equ. (48) and (49) c/a and R/a are found to fix the field. The coefficient in the equ. (48) is always positive. The coefficient of R/a must therefore be positive as well, and this is satisfied for

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1+2\psi_2}{4}\right)\leqq\frac{\pi}{4}+\frac{1+2\psi_2}{2} \quad \text{or} \quad \psi_2\leqq 60^\circ,\ \gamma\geqq 30^\circ.$$

For $\gamma\leqq 30^\circ$ the slip-line field does not extend to the plane surface of the notch, $c/a=0$ and solution II for circular notches holds.

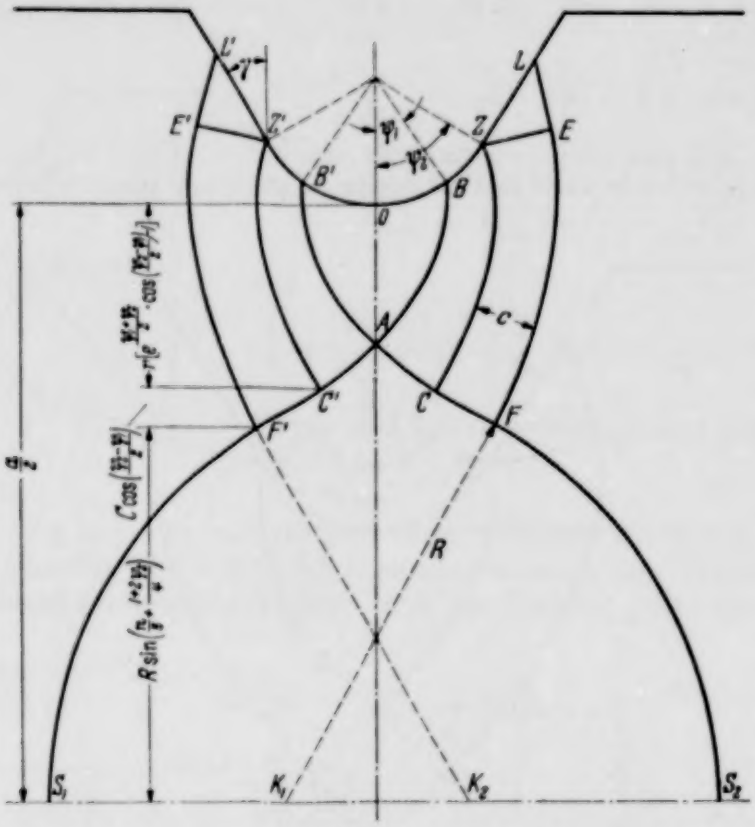


Fig. 20.

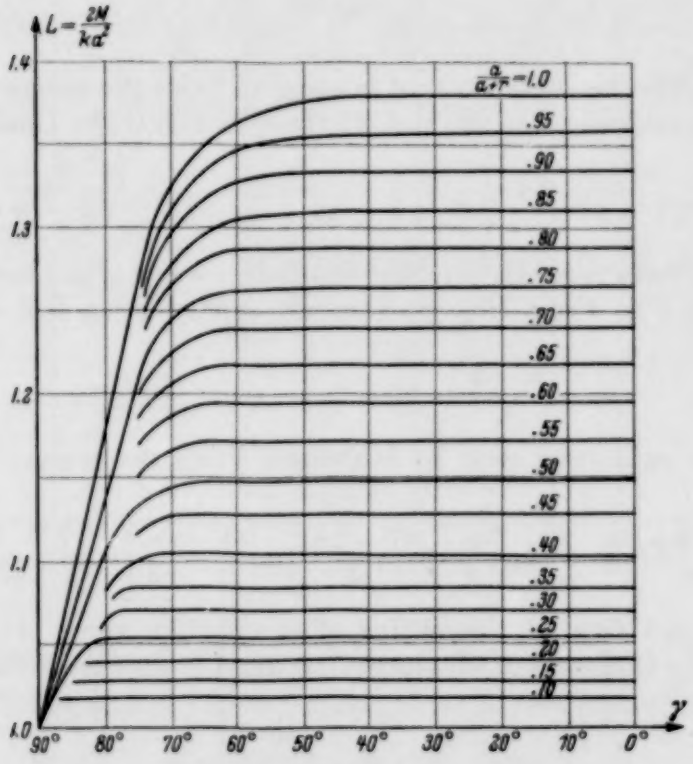


Fig. 21.

2) *Constraint factor.* Taking the moments with respect to the center K_1 the constraint factor is evaluated and plotted in Fig. 21. For $\gamma=60^\circ$ and various values of $a/(a+r)$ the constraint factor together with experimental points is plotted in Fig. 22.

c) **Lower bound.** The lower bound found for circular notches is valid in the present case for the same values of $a/(a+r)$ if $\gamma \leqq \pi/2 - \beta$. For $\gamma \geqq \pi/2 - \beta$ the side of the stress trapezoid coinsides with the plane of the notch. In this case:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma\,, \qquad L_{lower} = 4\left[\frac{1}{2} - \frac{r}{a}\left(\frac{1-\sin\gamma}{\sin\gamma}\right)^2\right](1+\cos\gamma)\,. \tag{49}$$

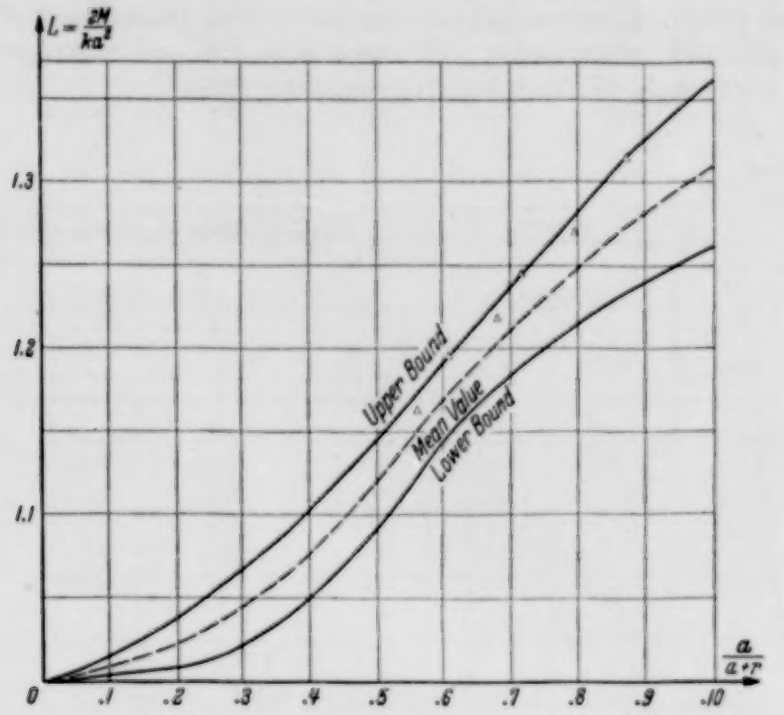


Fig 22.

9. Experimental confirmation of the theory. A series of tests was carried out to confirm the above theory. Test pieces of high conductivity copper and commertially pure aluminium cold worked to 30% reduction, were used. Figs. 23 and 24 show the types of stress-strain curves ob-

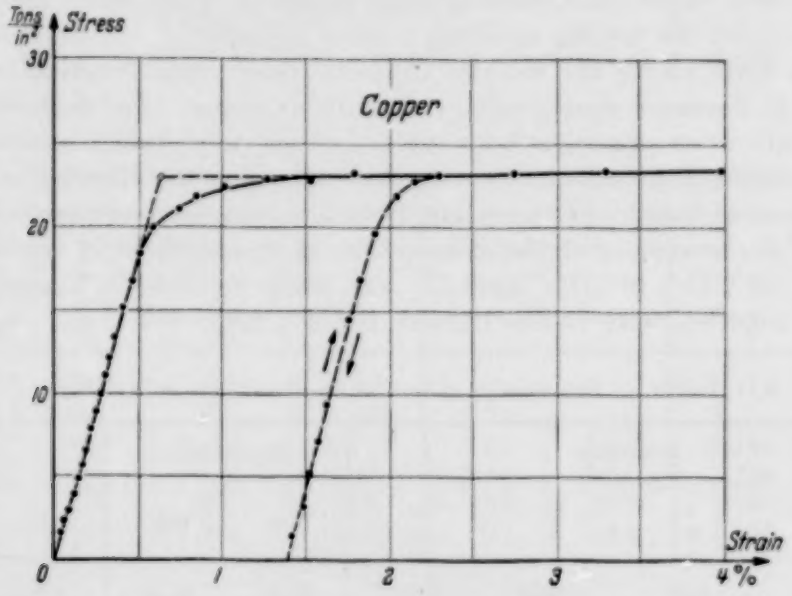


Fig. 23.

tained. The metal showed a rapid change from the elastic to the plastic condition with a low work hardening rate. The yield stress in simple tension was taken as: a) For copper $Y = 22.8$ tons per sq. in., b) for aluminium $Y = 8.9$ tons per sq. in. The von *Mises* yield criterion, which is a good

approximation for these two metals[1], was assumed. Both values of Y agree with the yield stress found by plane strain tests, for 30% reduction. The dimensions of the bars used were $3'' \times 1''$ for copper specimens and $3'' \times 1^1/_4''$ for aluminium. The notches were sufficiently deep that a) plane strain conditions were insured b) the plastic zone did not spread to the un-notched part of the surface.

The specimens were subjected to four-point loading to give pure bending, using a 50 ton Denison testing machine. The specimens were placed between two pairs of steel rollers and the deflections were measured by dial gauge. Care was taken to secure central positioning of the load with respect to the axis of the notch, the rollers being well away from the notched region. The moments and deflections could be accurately derived from the measurements.

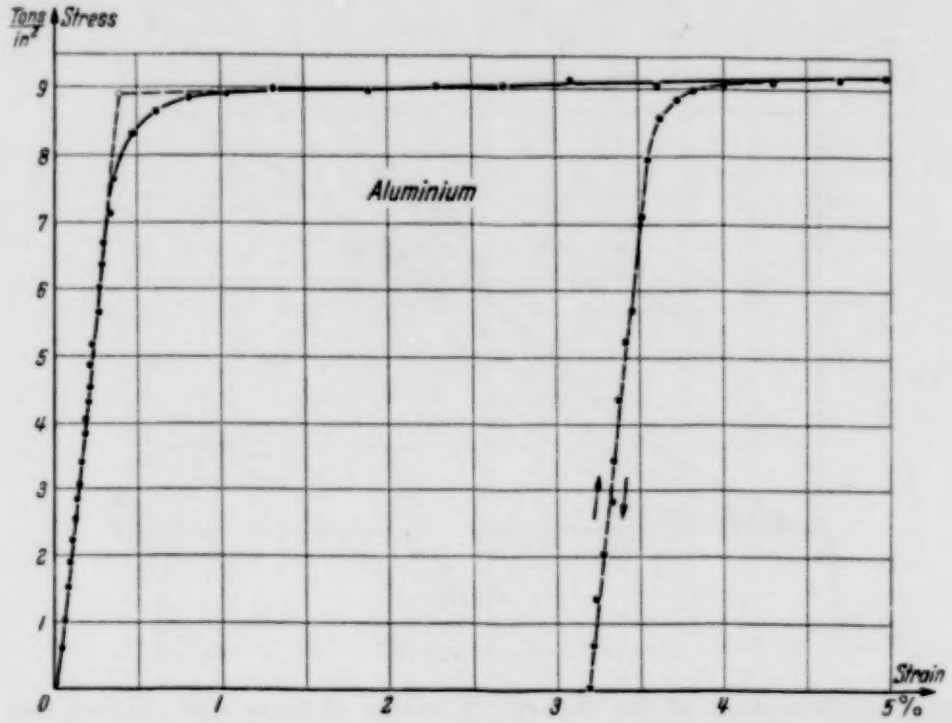


Fig. 24.

As soon as the limit moment was reached large plastic deflections occured. The load remained constant but the spring of the testing machine caused instability. To overcome this difficulty the load was increased a little above the desired value to cause rapid rotation of the indicator of the gauges and then left to decrease slowly until the rotation stoped. For deflectons well in the plastic region, however, continuous readings from both gauges were taken under constant load. By plotting the moment-deflection curve and extrapolating back to the elastic line the limit moment M_Y was found. Test pieces of length 1 ft were cut from 3 in wide bars of copper and aluminium. Care was taken to secure the accuracy of the dimensions of the notches. A series of V. cutters having semi-angles 30°, 45°, 50°, 55°, 60°, 70° and 75° was used for the V-, Trapezoidal, and V-notches with circular fillets, together with radius cutters R 1/8″, 1/4″, 3/8″, 1/2″ and 1″. For each case

Table 1. *Experimental results for Rectangular Notches*

Symbol	Metal	Dimensions				M_Y (tons/in.)		Constraint factor L		
		$2b$ in.	a in.	$\frac{2b}{a}$	w in.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Error %
R 1	Cop.	.0625	.588	.1063	3.09	8.79	8.70	1.25	1.238	—1.0
R 2	Al.	.125	.8163	.153	2.975	6.34	6.30	1.217	1.210	— .6
R 3	Al.	.125	.550	.227	2.99	2.74	2.71	1.175	1.164	—1.0
R 4	Al.	.250	.810	.309	2.992	5.71	5.65	1.136	1.123	—1.1
R 5	Cop.	.250	.641	.390	3.00	8.96	8.9	1.103	1.096	— .65
R 6	Al.	.375	.756	.495	2.985	4.98	4.65	1.067	1.060	— .65

[1] *G. Lianis* and *Hugh Ford*, J. Mech. Phys. Solids 5 (1956) p. 215.

Table 2. *Experimental results for Trapezoidal Notches.* (*Semi-angle* $\gamma = 50°$)

Symbol	Metal	Dimensions				M_Y (tons/in.)		Constraint Factor L		
		$2b$ in.	a in.	$\frac{2b}{a}$	w in.	Theor.	Exp.	Theor.	Exp.	Error %
T 1	Cop.	.065	.589	.106	3.104	8.81	8.80	1.245	1.245	0
T 2	Al.	.125	.835	.150	2.995	6.45	6.40	1.205	1.195	— .9
T 3	Al.	.125	.610	.205	2.980	3.34	3.30	1.171	1.16	—1.0
T 4	Al.	.250	.810	.309	2.975	5.64	5.55	1.126	1.11	—1.4
T 5	Cop.	.250	.625	.400	3.85	8.67	8.65	1.096	1.093	— .3
T 6	Cop.	.250	.520	.481	3.090	5.88	5.83	1.07	1.06	—1.0

Table 3. *Experimental results for Circular Notches*

Symbol	Metal	Dimensions				M_Y (tons/in.)		Constraint Factor L		
		r in.	a in.	$\frac{a}{a+r}$	w in.	Theor.	Exp.	Theor.	Exper.	Error %
C 1	Cop.	.65	.561	.900	2.905	8.00	7.94	1.331	1.320	— .85
C 2	Cop.	.125	.7045	.850	3.05	13.0	12.9	1.310	1.30	— .80
C 3	Al.	.250	.7465	.749	2.930	5.30	5.25	1.263	1.250	—1.0
C 4	Al.	.3125	.570	.645	2.97	2.98	2.93	1.216	1.197	—1.6
C 5	Al.	.500	.623	.555	2.975	2.76	2.73	1.173	1.162	— .95
C 6	Cop.	.500	.426	.460	3.082	4.17	4.15	1.131	1.121	— .90

Table 4. *Experimental results for V-Notches*

Symbol	Metal	Dimensions			M_Y (tons/in.)		Constraint Factor L		
		γ in.	a in.	w in.	Theor.	Exper.	Theor.	Exper.	Error %
V 1	Al.	30°	.596	3.015	3.80	3.80	1.38	1.38	0
V 2	Al.	50°	.535	3.015	3.02	3.02	1.374	1.374	0
V 3	Al.	60°	.584	3.00	3.58	3.57	1.361	1.361	0
V 4	Al.	65°	.585	3.00	3.66	3.63	1.348	1.340	—.6
V 5	Al.	70°	.592	3.00	5.56	3.54	1.320	1.312	—.6
V 6	Al.	75°	.588	3.015	3.38	3.36	1.260	1.254	—.50

Table 5. *Experimental results for V-Notches with Circular Fillets.* ($\gamma = 60°$)

Symbol	Metal	Dimensions				M_Y (tons/in.)		Constraint Factor L		
		r in.	a in.	$\frac{a}{a+r}$	w in.	Theor.	Exp.	Theor.	Exper.	Error %
CV 1	Al.	.125	.817	.871	2.960	6.70	6.70	1.318	1.318	0
CV 2	Al.	.125	.485	.795	3.005	2.33	2.31	1.280	1.270	— .8
CV 3	Al.	.250	.629	.715	3.015	3.81	3.86	1.246	1.241	— .4
CV 4	Al.	.250	.551	.680	2.99	2.67	2.64	1.230	1.218	—1.0
CV 5	Al.	.3125	.475	.603	3.00	2.08	2.08	1.197	1.197	0
CV 6	Al.	.3125	.381	.561	3.015	1.32	1.32	1.173	1.17	0

six to seven specimens were prepared. The exact notch dimensions were measured by a travelling microscope.

Tables 1 to 5 give experimental details. For tets on Trapezoidal and fillet notches the angle of the notch was kept constant and the ratios $2b/a$ and $a/(a + r)$ were varied, since speciments with constant ratios and varying angles would be difficult to prepare to close tolerances.

The experimental results for the constrain factor are given in Figs. 10, 15, 17, 18 and 22. In all cases the experimental points are near to the upper bound. The discrepancies are less than 1.5%.

The results from these tests show that the upper bound is the complete solution, and the fact that the experimental points lie slightly below the upper bound, is due to a slight overestimation of the yield stress.

10. Conclusion. It is believed that all practical cases of notch shapes are covered by the above analysis. The experiments are in favour of the upper bound solution, though, for practical cases, the mean value derived from the limit analysis differs very little from that of the bounds, and it can be used with confidence.

Further tests, however, are needed to confirm the deformation pattern. It is also believed that this analysis will furnish useful informations on the study on the mechanism of fracture.

(Eingegangen am 5. Mai 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor *George Lianis*, Ph. D., D. I. C., Dipl.-Ing.,
School of Aeronautical Engineering, Purdue University, Lafayette, Indiana, U.S.A.

Stufenlos verstellbare mechanische Getriebe

Von Dipl.-Ing. FRIEDR. W. SIMONIS VDI, Reg.-Baurat a. D., Beratender Ingenieur VBI,
Vereidigter Sachverständiger für Werkzeugmaschinen und Werkzeuge, Berlin

Zweite, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage
des in erster Auflage erschienenen Werkstattbuches Heft 96

Mit 252 Abbildungen. VIII, 190 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 29,40

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Reibradgetriebe mit Kegelscheiben und Zylindern · Reibradgetriebe mit umlaufendem Reibring · Reibgetriebe unter Benutzung von Kugeln als Übertragungsmittel (Globoid-Getriebe) · Planetengetriebe mit frei umlaufenden Kugeln oder Rollen · Umhüllungs- oder Umschlingungsgetriebe mit Riemenübertragung · Umhüllungs- oder Umschlingungsgetriebe mit Kettenübertragung · Theorie der Umschlingungsgetriebe mit keilförmigen Umlaufflächen · Schaltwerksgetriebe · Steigerungsmöglichkeiten für übertragbare Leistung und erzielbaren Verstellbereich bei stufenlosen Getrieben (Differentialgetriebe) · Selbsttätige Steuerungen von stufenlosen Getrieben zur Erfüllung eines geforderten bestimmten Arbeitsablaufes · Sondergetriebe · Sachverzeichnis.

Optimale Stufenrädergetriebe für Werkzeugmaschinen

Errechnung und Räderanordnung

Von Dr.-Ing. E. h. ERWIN STEPHAN

Mit 139 Abbildungen. VI, 102 Seiten Gr.-8°. 1958. DM 21,—; Ganzleinen DM 25,—

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Das Buch soll bei einem vorgeschriebenen Drehzahlbereich und für eine vorgegebene Stufenzahl Wege zeigen, die das Auffinden optimaler Stufenrädergetriebe erleichtern. Für neuzeitliche Ansprüche ist es erwünscht, einem solchen Getriebe eine geometrische Drehzahlstufung zu geben. Durch die Zweiteilung in die Abschnitte ‚Entwurf und Errechnung' und ‚Bauliche Maßnahmen' trägt der Verfasser für den Entwurf derartiger Getriebe Rechnung. Wegen der Möglichkeit, Aufwand und Platzbedarf von Stufenrädergetrieben durch Anwenden gebundener Getriebe herabzusetzen, geht er auf die einfache und die mehrfache Bindung besonders ein. Auf die Schwierigkeiten, daß bei doppelt gebundenen Getrieben die Normdrehzahlen nur schwer und bei dreifach gebundenen nicht einzuhalten sind, weist der Autor besonders hin. Von großem Wert ist die Beschreibung der Einschaltmöglichkeiten der Räder während des Laufes mit Hilfe elektrisch oder hydraulisch betätigter Reibungskupplungen bzw. durch Kupplungen mit Synchroniseinrichtungen. Das kleine übersichtliche Werk kann dem einschlägigen Konstrukteur manche Anregung vermitteln."

VDI-Zeitschrift

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Kinematisch-getriebedynamisches Praktikum

Lehr- und Übungsbuch zur graphodynamischen Analyse ebener Getriebe für den Konstrukteur, die Vorlesung und das Selbststudium

Von Dr. phil. habil. RUDOLF BEYER, apl. Professor für Getriebelehre und Kinematik an der Technischen Hochschule München, Oberstudienrat a. D. des Oskar-v.-Miller-Polytechnikums, Akademie für angewandte Technik, München

Mit 125 Abbildungen. VIII, 170 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 29,40

INHALTSÜBERSICHT

Grundlagen. Kraftreduktion in ebenen Getrieben. Kinetische Energie des Getriebes. Das d'Alembertsche Prinzip. Die dynamische Grundgleichung für die Kraft- und Massenwirkungen in zwangläufigen Getrieben. Beispiele zur I. Wittenbauerschen Grundaufgabe. Zusammenfassendes Beispiel. Kraft- und Massenwirkungen an einem siebengelenkigen Koppel-Rastgetriebe. Korrektur der Stabkräfte. Das Federhoferschen λ-Verfahren. Dynamik der Getriebe mit doppeltem oder mehrfachem Antrieb. Ergänzende Grundlagen zur Dynamik des komplan bewegten Getriebegliedes. Bewegung des Schwerpunktes der Gliederanordnung eines ebenen Getriebes. Das Wittenbauersche Massen-Wucht-Diagramm. Reibung in Getrieben. Übungsbeispiele mit Lösungen. Aufgaben. Schrifttum. Namen- und Sachverzeichnis.

Vom gleichen Verfasser erschienen:

Kinematisch-getriebeanalytisches Praktikum

Hand- und Übungsbuch zur Analyse ebener Getriebe für den Konstrukteur, die Vorlesung und das Selbststudium

Mit 162 Abbildungen. VII, 172 Seiten Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 28,50

Kinematische Getriebesynthese

Grundlagen einer quantitativen Getriebelehre ebener Getriebe für den Konstrukteur, für die Vorlesung und das Selbststudium

Mit 258 Abbildungen. VII, 217 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 36,—

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG